Nr 2002:11

ÄMNESDIDAKTISK TEORI FÖR MATEMATIKUNDERVISNING

Ämneskunskapers relation till individ och omvärld

Madeleine Löwing

Göteborgs universitet
Institutionen för pedagogik och didaktik

Förord

I Lärarutbildningskommitténs slutbetänkande (SOU 1999:63) står det:

> Studenterna kan rikta sin utbildning mot kunskapsområden som kan vara ämnesspecifika eller tvärvetenskapliga till sin karaktär. Inom dessa områden skall relationen mellan "skolämnen" och "universitetsämnen" lyftas fram. … Inriktningarnas ämnen/ämnesområden skall struktureras så att de omfattar såväl frågor om vad undervisningen i skolan och lärandet skall handla om som betingelserna för att ett lärande skall ske hos elever. (s. 130)

I Läroplanskommitténs betänkande (SOU 1992:94) S*kola för bildning* finner man en ännu större medvetenhet om universitetsämnenas begränsade användbarhet som teorier för hur man hjälper till att bygga upp en begreppsvärld för barn och ungdomar:

> De frågor och kunskapsområden som skall behandlas skall inte främst bestämmas med utgångspunkt i vetenskapliga discipliner …(s. 78)

Kunskaper inom en s.k. skolämnesteori (det som Kilborn (1989) kallar för *didaktisk ämnesteori*) är väl etablerade inom den matematisk/naturvetenskapliga sektorn. I Göteborg har det sedan 1970-talet bedrivits en ämnesdidaktisk forskning. Under 1990-talet tonades emellertid debatten kring ämnesdidaktik ned samtidigt som allmändidaktiken fick ett uppsving. Arbetsformer och arbetssätt blev på så sätt överordnat undervisningens innehåll. Dagsläget är att den nya lärarutbildningen verkar marginalisera skolämnesteorin i matematik. Vår enhet har till exempel tappat större delen av den ämnesteori som vi undervisat om under de senaste 10 åren, detta trots att behovet av en skolämnesteori i matematik aldrig varit större än nu. Det är detta behov av skolrelaterad ämnesteori i matematik som rapporten handlar om.

En av pionjärerna inom svensk matematikdidaktik är Wiggo Kilborn. Det är hans forsknings- och utvecklingsarbete och hans skrifter som hittills utgjort grunden för den skolrelaterade ämnesteorin i våra matematikkurser. Jag, och många av mina kolleger har upplevt hur denna "didaktiska ämnesteori" givit förklaringar till varför elever har problem med att förstå olika typer av ämnesinnehåll. Samtidigt har vi fått ett språk som vi tidigare saknat för hur man kan beskriva olika fenomen och situationer som möter oss i klassrummet - från förskoleklassen till gymnasiet. Med denna rapport gör jag ett försök att beskriva och utveckla det arbete som Kilborn påbörjat.

Ett viktigt skäl för mig att skriva den här rapporten är de problem jag iakttagit under mitt avhandlingsarbete som omfattar klassrumsobservationer av matematikundervisning. Samtliga de lärare jag studerat har problem med att (för eleverna) förklara det ämnesinnehåll de undervisar om. De har också problem med att konkretisera ämnesinnehållet. Under senare år har en rad forskningsrapporter visat på liknande problem på andra håll i världen.

När jag presenterade en preliminär version av den här rapporten på Enheten för ämnesdidaktik, förstod jag hur svårt det är att bryta ny väg. Mycket av det som för mig är klart och entydigt visade sig vara mindre klart för andra, speciellt för dem som representerade andra ämnen. För att undanröja sådana problem har jag försökt reda ut en del begrepp i kapitel 3. En fråga som livligt debatterades var vad en ämnesteori för skolmatematikens innehåll skall kallas. Jag har i den här rapporten använt arbetsnamnet *Ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning*. Syftet med den här rapporten är dels att visa vilket arv av didaktiska kunskaper vi har i Göteborg, dels att initiera en förutsättningslös debatt om vilket innehåll som bör finnas i en utbildning av lärare i matematik. Denna debatt bör utmynna i ett utvecklingsarbete där personer med olika kompetens samverkar till att utveckla en ämnesdidaktisk teori för matematikundervisningens innehåll.

Under ett studiebesök i Kalifornien sommaren 2002 hade jag förmånen att träffa Liping Ma och diskutera ämnesdidaktisk teori ur ett internationellt perspektiv. Tack Liping för det stöd du gav mig! Jag vill också tacka Björn Andersson, Bo Anderson, Frank Bach, Carl-Henrik Fant, Johan Häggström, Berner Lindström, Aadu Ott, Anita Wallin och Inga Wernersson för kritiska och värdefulla synpunkter som i flera fall fått mig att tänka om och revidera rapporten. Sist men inte minst vill jag tacka Wiggo Kilborn. Hans pionjärbete, och de diskussioner detta lett till på matematikavdelningen, har varit min inspirationskälla till att skriva rapporten. Ett stort tack, Wiggo, även för synpunkter, engagemang och intensiva diskussioner under rapportens tillkomst.

I rapporten skriver jag ofta "vi" och "vår uppfattning". Det gäller då åsikter och synsätt som jag delar med mina närmaste kolleger.

Mölnlycke i oktober 2002

Madeleine Löwing

Innehållsförteckning

1. Inledning

I mitten av 1980-talet skedde något av ett paradigmskifte inom utbildningsområdet i och med två konferenser vars innehåll senare dokumenterades i böckerna Fackdidaktik, del 1 - 3 (Marton, 1986). Det här ledde till att lärarutbildningarna kom att fokuseras på de två begreppen ämnesdidaktik och allmändidaktik. Trots att ämnesdidaktik numera är ett examensämne vid Göteborgs universitet har man emellertid inte på djupet diskuterat vad som menas med matematikämnets didaktik och ännu mindre vilken typ av ämnesteori som bör utgöra grunden för de ämnesdidaktiska vad och hur-frågorna. Det är framför allt behovet av och innehållet i en *ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning* som behandlas i den här rapporten.

Syftet med en ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning är att systematisera och förklara undervisning och inlärning av ett ämnesinnehåll

- utgående från olika mål och syften,
- med hänsyn tagen till olika individers förkunskaper och behov av kunskaper och
- utgående från teorier om undervisning och inlärning.

De viktigaste avnämarna för den här teorin är lärarutbildningarna. Av det skälet inleds rapporten i kapitel 2 dels med kommentarer till mål och syften med den nya lärarutbildningen, dels med att förklara vad vi menar med ett lärarperspektiv.

Ett problem med att introducera och diskutera en ny teori är att termer och begrepp ännu inte är etablerade. Detta leder lätt till missuppfattningar. För att undanröja sådana problem ägnas kapitel 3 åt att klarlägga vissa begrepp och termer som används i rapporten samt åt att visa att den ämnesdidaktiska teorin har de egenskaper som krävs av en teori. Det är också viktigt att klargöra skillnaderna mellan en ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning och den teori som används inom den akademiska disciplinen matematik.

Ett av syftena med en ämnesdidaktisk teori i matematik (avsedd för matematikundervisning) är att analysera och systematisera det ämnesinnehåll som skall förmedlas till eleverna med hjälp av en ämnesdidaktik. Ett dilemma är då att innebörden i begreppet ämnesdidaktik inte är helt klart. Kapitel 4 ägnas därför åt vad som kan menas med ämnesdidaktik.

I jämförelse med begreppet ämnesdidaktik, så är begreppet allmändidaktik relativt väl utrett. Detta faktum diskuteras i kapitel 5. Här behandlas även en del akuta problem inom matematikundervisningen som under senare år beskrivits i såväl amerikanska som svenska utvärderingar. Vår uppfattning är att en hel del av dessa problem är en följd av bristande teoretiska kunskaper om innehållet i matematikundervisningen.

Mot de bakgrunder som hittills beskrivits är det i kapitel 6 dags att mer ingående beskriva den ämnesdidaktiska teorin för matematikundervisning. Först beskrivs behovet av en teori och därefter att det redan har gjorts en hel del förarbete för att bygga upp teorin. Det finns således kunskaper att utgå från inför ett fortsatt arbete med teorin. Vidare ges exempel på hur den här typen av teoribildning under senare år fått ett allt starkare internationellt stöd.

Ett stort problem vid introduktionen av en teori, är att kunna beskriva såväl teorin, som behovet av den, på ett konkret sätt. Detta är inte minst viktigt när det gäller en teori som skall ligga till grund för lärares undervisning. En sådan konkretisering sker i kapitel 7. Med hjälp av fyra relativt utförliga exempel beskrivs olika aspekter av teorin så att man på djupet skall kunna förstå vad den handlar om. Observera emellertid att dessa exempel inte beskriver teorin i sig utan

- hur det kan gå till att bygga upp delar av teorin genom forskning och beprövad erfarenhet
- vikten av att teorin är relevant med avseende på det territorium den skall förklara och förståelig för den som skall använda teorin
- att det alltid måste ske en samordning mellan skolämnesteorin och den ämnesdidaktik som går ut på att omsätta teorin i praktiken.

I kapitel 8, slutligen görs en sammanfattning av rapporten med siktet inställt mot framtiden

1. En ny lärarutbildning och lärarperspektivet

I slutet av 1980-talet fick vi en ny grundskollärarutbildning i vilken tanken var att man skulle väva samman det bästa från de tidigare utbildningstraditionerna. Ungefär 10 år senare var det dags för en ny reform. I inledningen till U 2000/01:UbU3 kan man läsa motiveringen till detta:

> Utskottet pekade på att de snabba förändringarna i omvärlden kräver en ny lärarroll. (s. 1)

I de direktiv som gavs till Lärarutbildningskommittén i april 1997 beskrivs ett viktigt skäl till denna förändring nämligen att målen och styrningen för skolan förändrats

> vilket bl.a. innebär att lärarna förväntas själva utveckla nya sätt att organisera och leda arbetet i skolan. Hur eleverna skall nå målen är det lärarnas uppgift att avgöra. Den förändrade lärarrollen kräver enligt regeringen ett ledarskap med professionella kunskaper om hela verksamheten - läraren måste kunna ta ansvar för såväl övergripande mål som ämnesspecifika - vara både specialist och generalist. Läraryrket kräver också mer av en teoretisk kompetens (dir. 1997:54) (s. 1)

De skolreformer som skett under senare år har medfört att ett stort ansvar nu ligger på den enskilde läraren. Detta kräver i sin tur att lärarna i sin utbildning ges så goda professionella kunskaper att det är möjligt för dem att ta detta ansvar. Ett viktigt krav på utbildningen är därför att den är relevant för den pedagogiska yrkesverksamheten och att de teorier man studerar låter sig transponeras till praktisk yrkeskunnande. Detta kräver en breddad vetenskaplig bas:

> Regeringen förklarar i propositionen att den delar kommitténs bedömning att det behövs en stärkt och breddad vetenskaplig bas för lärarutbildningen med relevans för den pedagogiska yrkesverksamheten. Ett viktigt skäl till att stärka forskningen och forskarutbildningen är enligt regeringen att öka och bredda kunskaperna kring lärande och pedagogiskt arbete, så att läraryrket kan utvecklas. (s. 14)

Vad som menas med vetenskaplig bas, och vilka vetenskaper som avses, framgår emellertid inte. Den här frågan är speciellt intressant ur Göteborgs perspektiv där vi i 30 år bedrivit ett forsknings- och utvecklingsarbete inom matematikens och naturvetenskapernas didaktik. Resultatet av denna forskning har gett viktiga bidrag till innehållet i grundskollärarutbildningen.

2.1 Lärarprogrammet i Göteborg

I en utbildningsplan, *Lärarprogrammet 120 - 220 poäng en förnyad lärarutbildning vid Göteborgs universitet 2001 - 2002,* beskrivs hur man i Göteborg har tänkt sig den nya lärarutbildningen. Ett viktig inslag i denna nya utbildning är universitetens stora frihet att profilera sig:

> Landets olika lärarutbildningar har nu möjlighet att bättre tillvarata det som är unikt ifråga om forskning och undervisning vid respektive lärosäte. Lärosätena beslutar nu

> själva om sin organisation och om hur utbildningen skall styras. Vid Göteborgs universitet kommer därför lärarutbildningen att få en "göteborgsprofil". (s. 3)

Det didaktiskt orienterade ämnesinnehåll som vi sedan slutet av 1980-talet kunnat arbeta med inom MaNO-lärarutbildningen utgör enligt vår uppfattning en intressant del av denna "göteborgsprofil". Göteborgs universitet var nämligen tidigt ute när det gäller ämnesdidaktisk forskning och kunskapsbildning, något som beskrivs mer utförligt i kapitel 4. Det är kanske den typen av forsknings- och utvecklingsarbete man har haft i åtanke när man i regeringspropositionen önskade en "stärkt och breddad vetenskaplig bas för lärarutbildningen med relevans för den pedagogiska yrkesverksamheten".

Den nya lärarutbildningen har nu pågått en tid och det finns i dag ett antal kursplaner för utbildning inom matematik- och NO-områdena. När det gäller ämnet matematik finner man i dessa kursplaner färre inslag av en ämnesdidaktisk "göteborgsprofil" än tidigare. De inslag som finns förekommer i stort sett bara i de kursplaner som är inriktade mot de tidigare åldrarna. Detta bör sättas i relation till det stora behov av att förändra matematikundervisningen som lyfts fram av bl.a. Grevholm (1993) och NCM (2001) och som inte minst gäller undervisningen på högstadiet och gymnasiestadiet.

I *Lärarprogrammet 120 - 220 poäng* (2001) kan man vidare läsa:

> Det övergripande målet för lärarutbildningen är att studenterna skall lägga grunden för en yrkeskompetens. Denna kompetens är komplex och byggs upp av olika kunskaper. Det gäller bl.a. goda kunskaper *i* och *om* ett ämne eller ett ämnesområde, insikter om både lärandet och lärandets villkor och om barns och ungdomars olika möjligheter, problemlösningsförmåga och vilja att ständigt lära nytt. (s. 3)

Som lärarutbildare är det lätt att hålla med om detta, men de avgörande frågorna är vem som beslutar om vad och vad som menas med "goda kunskaper i och om ett ämne". En annan viktig fråga är vilka ämnen och kunskaper som avses och vilken relevans dessa har för läraryrket?

När det gäller ämnet matematik finns det all anledning att reflektera över vad Morris Kline (1953) skriver i *boken Mathematics in Western Culture*, delvis med hänvisning till Bertrand Russell:

> The distinction we have drawn between pure and applied mathematics is precisely what Bertrand Russell had in mind when he made the seemingly flippant but entirely justified remark that pure 'mathematics is the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true'. Of course many a person entertained such thougts about mathematics without encouragement from Russell. … Mathematicians do not know what they are talking about because pure mathematics is not concerned with physical meaning. (s. 516)

I en artikel i boken *Kommunicera naturvetenskap i skolan* (Strömdahl, 2002) skriver Börje Ekstig något liknande med avseende på naturvetenskap:

> Jag vill i detta kapitel ge några synpunkter på det spänningsfält som finns mellan elevernas förhandsuppfattningar och naturvetenskapliga begrepp. Om undervisningen inte lyckas överbrygga detta spänningsfält på ett ur elevernas perspektiv tillfredsställande sätt, kommer denne elev att förlora tilltron till sin egen förmåga att lära naturvetenskap. (s. 149)

För den som bedrivit forskning kring skolelevers uppfattningar om och kunskaper i matematik är det uppenbart att det Ekstig här skriver i lika hög grad gäller för ämnet matematik. Ekstig utvecklar i artikeln det som just citerats och hänvisar då till Wolpert (1992)

> Wolpert framhåller att naturvetenskapen i den västerländska kulturen är unik. Den bygger inte på vardagserfarenhet eller sunt förnuft, den är abstrakt och matematisk, den har inte med teknik att göra … Wolpert påpekar vidare att många människor accepterar naturvetenskapliga lagar, inte för att de förstår dem utan för att det har sagts till dem att de är sanna. … Wolperts huvudtes är den att många missförstånd om naturvetenskap skulle kunna undvikas om man insåg hur onaturlig naturvetenskapen är. … Naturligt tänkande, vanligt vardagligt tänkande, kan aldrig leda till en förståelse av naturvetenskapens karaktär. (s. 150, 151)

Vad Ekstig här lyfter fram är att de modeller som används inom naturvetenskaplig forskning för länge sedan passerat vad som kan uppfattas av andra än specialister inom området. Modeller som är viktiga för att utveckla vetenskapen är samtidigt så komplicerade för vardagsmänniskan (och skoleleven) att de inte kan användas till att bygga upp en naturvetenskaplig vardagsuppfattning. För detta krävs en teori som anpassats till det behov och de förkunskaper som finns hos vardagsmänniskan. Vad som just skrivits om naturvetenskap gäller i lika hög grad för matematik. (Se t.ex. Grevholm, 1993) Det är inte en slump att så många elever flyr från de matematisk/naturvetenskapliga utbildningarna.

Om man relaterar vad som nyss skrivits till skolans styrdokument och värdegrund, så har man all anledning att fråga vad som menas med en ämnesteori i matematik "med relevans för den pedagogiska yrkesverksamheten" och om ämnesteorin i dagens lärarutbildning lägger "grunden för en yrkeskompetens" som enligt *Lärarprogrammet* är "komplex och byggs upp av olika kunskaper". Förklarar denna teori de problem som uppstår då läraren skall kommunicera ett ämnesinnehåll med sina elever och kan den "kopplas till de verksamhetsförlagda delarna i utbildningen"? Detta är frågor som kommer att diskuteras och konkretiseras längre fram i den här rapporten.

Det som hittills framförts i det här kapitlet får inte uppfattas som en kritik mot den forskning och den metoduppbyggnad som sker inom det matematisk/naturvetenskapliga området. Avsikten är enbart att, i likhet med Ekstig, klargöra att dessa teorier och denna forskning inte har som sitt syfte att förklara barns och ungdomars inlärning och begreppsbildning - och inte heller gör det. Som underlag för att förstå hur kunskaper utvecklas och hur begreppsbildning går till inom skolans matematik och naturvetenskap krävs helt andra teorier, avsedda för just det ändamålet.

2.2 Vad menas med ett lärarperspektiv?

I målen för lärarexamen (Högskoleförordningen 1993:100) kan man läsa:

> För att få lärarexamen skall studenten ha de kunskaper och de färdigheter som behövs för att förverkliga förskolans, skolans eller vuxenutbildningens mål samt för att medverka i utvecklingen av respektive verksamhet enligt gällande föreskrifter och riktlinjer. Studenten skall vidare kunna
>
> - omsätta goda och relevanta kunskaper i ämnen eller ämnesområden så att alla elever lär och utvecklas.
> - bedöma och värdera elevers lärande och utveckling … (23. Lärarexamen.)

För att tillägna sig dessa kunskaper och färdigheter och för att kunna avgöra vad som är rimliga (yrkes)kunskaper för en lärare måste den lärarstuderande kunna ta ett lärarperspektiv och kunna skilja detta från ett elevperspektiv. Uppmaningen till de lärarstuderande att "Nu skall ni ta ett lärarperspektiv" blir ju bara tomma ord om man inte som lärarutbildare, på en explicit nivå, förklarar vad ett lärarperspektiv innebär. När det gäller skolämnet matematik brukar vi ge de studerande följande förklaring.

2.2.1 Ett ytligt lärandeperspektiv - ett elevperspektiv

Undervisningen i skolan kan ses som ett socialt spel som läraren spelar simultant med alla elever i klassen. Ett dilemma är emellertid att lärare och elever ofta spelar var sitt spel och efter olika regler. Läraren har ett mål med undervisningen medan många elever har ett helt annat.

- Många elever är nöjda om de kan få rätt svar på de uppgifter de fått att lösa, oberoende av metod eller insikt.
- Oftast vill eleverna hellre veta hur de skall lösa sina uppgifter på enklast möjliga sätt och med minsta möjliga ansträngning, än att få en förklaring av underliggande begrepp.
- Ett av skolans mål är att eleverna skall samarbeta och "tala matematik". Många av eleverna är emellertid helt nöjda om de slipper tala och om någon annan i gruppen löser de uppgifter de har fått, så att de kan skriva av dem och därmed visa att de är klara.

Detta är ett spel som de lärarstuderande på olika sätt har deltagit i när de gick i skolan och som på olika sätt har format deras syn på inlärning. Man måste samtidigt vara medveten om att det här spelet är mycket funktionellt för den som på enklast möjliga sätt vill "glida" igenom skolans matematikundervisning. Det visar sig emellertid att många av de studerande verkar se på universitetets undervisning och sin nuvarande inlärning ur ett liknande perspektiv. För dem verkar det vara viktigare att få godkänt resultat på en arbetsuppgift eller en eventuell tentamen än att på djupet förstå innehållet och syftet med sina studier och därmed lägga en god grund för sitt blivande yrke.

2.2.2 Ett utvecklat lärandeperspektiv

Ett mer önskvärt lärandeperspektiv är att eleverna själva (efter hand) reflekterar över, och tar ansvar för, sin egen inlärning. Detta innebär att de

- strävar efter att själva ta reda på syfte och mål för det de skall lära sig, såväl ur ett långsiktigt som ur ett kortsiktigt perspektiv och att själva kunna avgöra när de nått målet.
- reflekterar över det de håller på att lära sig i relation till tidigare inhämtad kunskap, vad den nya kunskapen innebär och om det finns andra, alternativa lösningsmetoder, strategier och sätt att tänka?
- försöker att optimera sin inlärning och själva söka efter kunskap genom att fråga sin lärare, diskutera med sina kamrater och leta i annan litteratur än kurslitteraturen.

Detta lärandeperspektiv är önskvärt inom de flesta utbildningar och ofta en förutsättning för att med framgång kunna studera vidare. Den lärarstuderande som tagit det här perspektivet i lärarutbildningen kommer sannolikt att klara sina studier utan större besvär och kommer sannolikt senare (som lärare) att själva kunna lösa alla de matematikuppgifter som behandlas i skolans undervisning. Men det är ändå inte detta som är ett lärarperspektiv även om detta lärandeperspektiv är en god förutsättning för att skaffa sig ett lärarperspektiv.

2.2.3 Ett lärarperspektiv

Läraren är arbetsledare för en grupp individer (se t.ex. Madsén, 2002) som alla har olika förutsättningar för att studera matematik. En del elever är intresserade och har goda förkunskaper, andra har låg motivation och sämre förkunskaper. Olika elever har också olika erfarenheter och olika språklig förmåga. Som lärare har man ansvar för att möta <u>alla</u> dessa elevers behov. Detta betyder

- att läraren först och främst måste kunna ta en annan människas perspektiv. Det räcker inte med att man själv har förstått något. Man måste alltid reflektera över om det man har förstått också kan förstås på ett annat sätt och vilka förkunskaper och erfarenheter som krävs för att förstå ett innehåll på dessa olika nivåer och sätt.

- att läraren måste ha ett språk som fungerar inte bara för att förklara något, eller för att lösa ett problem, på ett formellt sätt. Språket måste också fungera för att konkretisera och verklighetsanpassa det som skall förklaras. De olika formella och informella termer och uttryck som används måste vara knutna till varandra på ett sådant sätt att det som konkretiseras också, vid behov, kan leda till en formell kunskap.
- att läraren, oavsett vilket stadium hon arbetar på, måste känna till såväl innehållet, målen som didaktiken på övriga stadier. Faran med att lärare på olika stadier inte behärskar varandras undervisningsinnehåll, mål och didaktik, är att undervisningen i så fall blir osammanhängande för eleverna och ibland även obegriplig. Eleverna får helt enkelt inte den kontinuitet som krävs för att de skall kunna bygga upp och strukturera kunskap.

Man måste också vara medveten om att undervisningskunskap inte enbart handlar om praktik och egna erfarenheter. Det finns tusenåriga erfarenheter av vad som hittills fungerat och inte fungerat vid undervisning. Det finns hundraåriga erfarenheter från forskning kring undervisning och inlärning. Genom att sammanställa och systematisera sådan kunskap får man en teori. Teorin handlar således om att ge de lärarstuderande en väl grundad och utprövad beskrivning av hur undervisning och inlärning inom ett ämne kan gå till. Utgående från en sådan teori och i kombination med nedärvda lärarkunskaper, kan den studerande reflektera över sina egna idéer, fatta egna beslut och på sikt mejsla ut sin egen lärarprofil.

För en lärare som inte har en fungerande teori att falla tillbaka på utan hela tiden måste improvisera, kan lektionerna lätt bli till "happenings". När en elev ställer en fråga måste läraren snabbt kunna avgöra vad eleven menar med frågan, vilket problem eleven har och därefter momentant fatta viktiga beslut med avseende på just den elevens fråga. Läraren måste således i förväg känna till vilka möjligheter som finns att, utgående från elevers olika förutsättningar, ge olika förklaringar i anslutning till den ställda frågan, veta hur olika elever brukar tänka och vilka olika sätt det finns att förklara på. Det som för en lärare verkar vara enkelt och självklart kan för en elev vara helt obegripligt. Underlag för ett sådant handlande skall finnas i en ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning.

Det är således medvetenheten om och förhållningssättet till det som just beskrivits som ingår i ett lärarperspektiv och det är ur denna synvinkel vi vill att den lärarstuderande skall bedriva sina studier i matematik och lösa de skolnära problem de sätts att lösa under utbildningen.

3. Några preliminära begrepp

När terminologin inom ett område ännu inte är etablerad så uppstår det av naturliga skäl tolkningsproblem. Vid diskussioner med kolleger från olika enheter och institutioner har det visat sig att en del av de termer och begrepp som används i rapporten kan missuppfattas. Avsikten med det här kapitlet är att reda ut och klarlägga innebörden i några sådana termer och begrepp.

3.1 Olika typer av ämnesteori

Den första frågan gäller vad som menas med en ämnesteori i matematik. En enkel tolkning är att det är det innehåll som beskrivs i de kursplaner i matematik som används vid lärarutbildningen i Göteborg. Det förekommer då två typer av ämnesteori.

- Dels en ämnesteori som syftar till att fördjupa de studerandes egna kunskaper i matematik. Avsikten med en sådan teori är att ge de studerande kunskaper om och en inblick i matematiken som en vetenskap byggd på deduktiv teori.
- Dels en ämnesteori med didaktisk inriktning som avser att ge de studerande ett lärarperspektiv på ämnet. Denna bygger på en empirisk grundad teori och tar bl.a. sin utgångspunkt i forskning om barns och ungdomars inlärning och deras förmåga att tillgodogöra sig olika typer av ämnesinnehåll.

Av dessa två teorier är den förstnämnda etablerad sedan hundratals år tillbaka och tillhör en matematisk/naturvetenskaplig fakultet. Den är utvecklad av och för akademiker som "en abstrakt generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling" (*Nationalencyklopedin,* 1994). Som sådan har den rönt stor framgång, inte minst genom att ge modeller till en rad andra vetenskaper. Inom denna ämnesteori ryms emellertid inte modeller för hur kunskapen är relaterad till individ och situation, t.ex. hur barn och ungdomar utgående från olika förutsättningar kan bygga upp ett matematiskt vetande användbart i vardagslivet och för att studera andra skolämnen. För detta behövs en helt annan teori, den som i rapporten kallas för *ämnesdidaktisk teori*. Denna senare teori tillhör undervisningsvetenskaperna och har som syfte att förklara och systematisera vår kunskap om barnets, ungdomens och vardagsmänniskans möjligheter och förmåga att tillgodogöra sig matematiska kunskaper och att bygga upp för dem förståeliga matematiska modeller.

Avsikten med den ämnesdidaktiska teorin är i första hand att ge lärare i ungdomsskolan en teori utgående från vilken de kan analysera, planera och utvärdera innehållet i skolans matematikundervisning. Ett dilemma är härvidlag att olika elever tänker och lär på olika sätt utgående från individuella erfarenheter, intressen och förkunskaper. En förklaring som fungerar för en viss individ och i en viss ålder fungerar inte alltid för andra elever i andra åldrar. En förklaring som av en människa kan uppfattas som korrekt och stringent kan för andra människor vara obegriplig och t.o.m. förvirrande. Syftet med den ämnesdidaktiska teorin är därför att beskriva, systematisera och i möjligaste mån förutsäga vad som kan uppfattas av olika elever i olika åldrar och hur den kunskap som på det sättet behandlas, successivt kan tranponeras och efter individuella behov göras allt mer stringent och slutgiltig. Det som kommer att behandlas i den här rapporten är lärarutbildningens behov av en väl utvecklad ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning.

Den ämnesdidaktiska teorin för matematikundervisning är en teori om undervisningens innehåll och får inte förväxlas med ämnesdidaktik. Ämnesdidaktiken handlar om hur man som lärare, utgående från givna elever och givna mål och resurser, kan planera och utvärdera undervisningen samt hur man därvid kan välja konkretiseringsform, arbetsform och arbetssätt. Detta brukar benämnas didaktikens vad- och hur-frågor. Observera emellertid att vad-frågan, alltså hur man väljer stoff, planerar och utvärderar undervisningen, kräver en teori för vad som är möjligt att undervisa om för olika individer i olika åldrar. Inte heller hur-frågan kan besvaras utan en ämnesdidaktisk teori. Det är inte meningsfullt att konkretisera något som saknar innehåll eller relevans och det är inte heller rimligt att välja en form för kommunikation innan man tagit ställning till vad som skall kommuniceras. Det är snarare så att valet av förklarings- och konkretiseringsnivå bör samordnas med målet och syftet för det som skall undervisas och att arbetsform och arbetssätt väljs på ett sådant sätt att möjligheterna till kommunikation och inlärning optimeras. Den ämnesdidaktiska teorin för matematikundervisning utgör således den karta som beskriver vilka ämnesdidaktiska vägval som är möjliga för olika individer.

Det som hittills beskrivits brukar leda till tre följdfrågor. Den första frågan gäller om det kan finnas flera olika teorier för matematik. All matematik måste väl bygga på samma räknelagar och räkneregler? En matematisk frågeställning kan väl inte ge olika svar? Vi menar att det här inte handlar om *resultatet* utan om *processen,* alltså om hur man utgående från olika förutsättningar kan komma fram till ett resultat. Den andra frågan gäller stringens. Skall man tillåta ett troliggörande av en matematisk modell eller skall man kräva ett stringent bevis? Svaret är givetvis att den som förmår uppfatta ett stringent bevis inte skall hindras från att göra det. Samtidigt anser vi det vara viktigt att alla de som inte förstår ett bevis, eller en formaliserad framställning, erbjuds någon annan form av förståelse t.ex. med hjälp av en lämplig metafor. En sådan förklaring är definitivt inte felaktig - den bör snarare betraktas som preliminär. Den tredje frågan gäller om en ämnesdidaktisk teori bara kan finnas för undervisning i ungdomsskolan. På det svarar vi att vi hittills bara arbetat med den här typen av teori på grundskole- och gymnasienivå. Samtidigt ser vi det som en självklarhet att man kan utvidga teorin till att gälla även den mer deduktivt inriktade matematikundervisning som förekommer inom universitet och högskolor t.ex. vid utbildning av ekonomer, samhällsvetare och ingenjörer. Även inom dessa utbildningar finns det studerande med olika förkunskaper, intressen och mål. Ingen av dessa grupper har som mål att forska i matematik utan deras fokus är inriktat mot helt andra yrken och vetenskaper. Vi finner det rimligt att dessa studerande, när de studerar matematik, skall undervisas på ett sätt som anpassats till just deras förkunskaper, deras förmåga och målet för deras studier. För att en sådan undervisning skall fungera väl, och för att man skall kunna nå optimala resultat utgående från de studerandes förkunskaper, torde det krävas någon form ämnesdidaktisk teori som underlag för alla högskolans lärare i deras strävan att möta olika studerandegruppers behov av kunskaper.

3.2 Är detta en teori?

En annan viktig fråga är om den ämnesdidaktiska teorin för matematikundervisning verkligen är en teori? Vänder man sig till *Nationalencyklopedin* (1995) så framgår det att en teori består av

> en grupp antaganden eller påståenden som förklarar företeelser av något slag och systematiserar vår kunskap om dem. En verksamhet sägs vara *teoretisk* i motsats till *empirisk* om den bygger på teori och därför inte enbart konstaterar fakta utan även förklarar givna fakta och ev. förutsäger nya.

För att visa att den ämnesdidaktiska teori som beskrivs i den här rapporten verkligen är en teori krävs det konkreta exempel som testas gentemot den ovan givna definitionen. I Löwing & Kilborn (2002 kapitel 9) ges fyra exempel som beskriver hur man kan <u>systematisera</u> och konkretisera didaktiska ämneskunskaper: *Mätning av area och volym*, *Procent*, *Tabeller och diagram samt Bråk och decimaltal*. (Fler exempel ges i kapitel 5 i den här rapporten.) I det här avsnittet tas division av tal i bråkform som exempel på teorins relevans.

En undersökning som presenteras i Löwing & Kilborn (2002) visar att

- endast 10% av eleverna i skolår 7 och 42% av eleverna i skolår 9 kunde ge ett korrekt svar på uppgiften $\frac{6}{5}/3$ och att

- endast 12% av eleverna i skolår 7 och 34% av eleverna i skolår 9 kunde ge ett korrekt svar på uppgiften $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$.

Syftet med en undersökning av det här slaget är att kartlägga i vilken utsträckning elever i olika åldrar behärskar ämnesinnehåll av olika slag. Detta kan utföras i två steg. I steg 1 använder man ett test med vars hjälp man kan inhämta kvantitativ information. Ett sådant test måste givetvis bygga på en teori (till en början en preliminär teori) om hur elever kan och brukar uppfatta division av bråk. Genom att analysera testresultaten kan man bilda sig en första uppfattning om tillståndet inom det fält man avser att analysera, t.ex. hur vanligt ett visst fel är. För att tränga djupare in i problematiken kan man följa upp testet med s.k. kliniska intervjuer, varvid man kartlägger de kvalitativa orsakerna till problemen. I det aktuella fallet finner man då att de elever som löser uppgifterna korrekt i allmänhet använder sig av en formel med följande innebörd: Om man skall utför divisionen $\frac{6}{5}/3$ så skall man skriva om nämnaren som $\frac{3}{1}$, invertera detta till $\frac{1}{3}$och därefter byta ut divisionstecknet mot ett multiplikationstecken. Detta ger $\frac{6}{5}/3$ = $\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{1}$, vilket är en av flera möjliga tekniker att lösa uppgiften.

Tyvärr visar det sig att ytterst få elever har en uppfattning om varför den här formeln fungerar. Att de kan lösa uppgiften handlar alltså inte om en matematisk insikt utan om en ren manipulation av siffror. För dem som inte kan lösa uppgiften är orsaken oftast att de har glömt formeln. Eftersom de flesta av eleverna inte heller har någon konkret uppfattning om operationens innebörd, eller någon metafor att falla tillbaka på, så kan de inte heller rekonstruera formeln eller finna andra lösningsalternativ. Det här är ett exempel på hur man inom en ämnesdidaktisk teori kan samla in och systematisera kunskap i avsikt att kunna <u>förklara</u> orsakerna till en akut företeelse.

Nästa steg i en teoriuppbyggnad kan bestå i att man söker och analyserar olika förklaringsalternativ. En viktig källa för detta är matematikens historia, där man ofta kan finna enkla lösningar som inte har tagit omvägen över algebran. I det här fallet finner man att antikens greker uppfattade bråket $\frac{6}{5}$ som att det består av 6 stycken av enheten $\frac{1}{5}$. Ur det perspektivet kan den nyss beskrivna uppgiften tolkas som en uppdelning av 6 enheter i 3 delar, alltså som $(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})$ + $(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})$ + $(\frac{1}{5}\,\frac{1}{5})$. Svaret blir då 2 enheter av storleken $\frac{1}{5}$ alltså $2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. Vi har därmed fått en alternativ typ av förklaring. Denna förklaring kan nu användas som en länk i en kedja av erfarenheter som tillsammans bidrar till att systematisera och förutsäga fler fakta, t.ex. vad som blir följden av olika sätt att presentera ett visst ämnes-innehåll. En annan fördel med den här förklaringsmodellen är att den lätt kan konkretiseras vilket kan bidra till en djupare förståelse av divisionen - även för dem som senare föredrar att använda formeln.

Det andra exemplet, $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$ är något annorlunda än det tidigare eftersom man här har ett bråk också i nämnaren. Här visar det sig att de flesta elever försöker fördela $\frac{3}{4}$ på $\frac{1}{4}$ personer (dela $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{4}$ högar). Anledningen till att de försöker använda en sådan strategi beror på att de under tidigare skolår bara uppfattat division som (för)delning. En lämpligare strategi kan vara att fråga sig hur många "kvartar" som ryms (innehålls) i 3 kvartar. Om man ställer frågan så, brukar de flesta av dessa elever direkt svara 3. Kunskap om den här operationen som kallas innehållsdivision får man genom att studera svensk skolhistoria. Metoden är t.ex. beskriven i Nilsson & Wigforss (1951). Det här är ett nytt exempel på hur man kan söka och systematisera kunskap i avsikt att förklara fakta och förutsäga nya fakta. Man kan därmed genom en systematisk planering förebygga problem som annars skulle ha uppstått senare.

Det som just beskrivits är bara en sida av den ämnesdidaktiska teorin. Det vetande som hittills beskrivits måste nu kompletteras med kunskaper om vilka förkunskaper som krävs för att kunna uppfatta de beskrivna strategierna. Till detta kommer att kunskapen måste kunna kommuniceras till olika individer vilket i sin tur betyder att man måste analysera såväl det språk som bör användas som de konkretiseringsmodeller och metaforer som leder till förståelse av kunskapen ifråga.

För de lärare som saknar teoretiska kunskaper av det här slaget blir problemen i undervisningen ofta så stora att de försöker undvika att behandla kunskapen ifråga. Detta är vad som idag ofta händer i grundskolans matematikundervisning. Ett exempel är när lärare låter sina elever översätta alla tal i bråkform till decimalform varefter de utför beräkningarna med hjälp av en miniräknare. Enligt en rimlig ämnesdidaktisk teori begår man därvid två misstag. För det första är bråkräkning en nödvändig förkunskap till algebran. Undviker lärare att behandla bråkräkning på grundskolan, så medför det att deras elever får problem med att utföra algebraiska förenklingar när de kommer till gymnasieskolan. För det andra är det viktigt att inse att decimaltalen enbart är ett annorlunda skrivsätt för en speciell typ av bråk. Enligt en äldre tradition (se t.ex. Nilsson & Wigforss 1951) behandlades i själva verket de allmänna bråken före decimaltalen vilket innebar att när man kom till decimaltalen så var räkneoperationerna redan förklarade med hjälp av motsvarande operationer med allmänna bråk. När man idag hoppar över bråktalen och går direkt på decimaltalen missar man därför förklaringarna till hur man dividerar tal i decimalform.

Hur tar man då reda på detta? Jo, genom nya systematiska studier. Utgående från en ämnesdidaktisk teori är den tidigare beskrivna uppgiften $\frac{3}{4} / \frac{1}{4}$ i själva verket konstruerad på ett sådant sätt att den lätt låter sig transformeras till 0,75/0,25. Som framgår av resultatet ovan så har denna möjlighet inte utnyttjats av eleverna eller också har eleverna inte förstått innebörden i uppgiften. Att den senaste förklaringen är den mest troliga visar resultatet på en annan uppgift nämligen 5 / 0,1. Den uppgiften har lösts av 23% av eleverna i skolår 6 och 49% av eleverna i skolår 8.

Man kan sammanfatta det som hittills skrivits så här: Genom att utföra studier av det just beskrivna slaget och därvid analysera hur olika uppgifter är uppbyggda och vilka strategier elever använder för att lösa uppgifterna, kan man efter hand systematisera de vunna erfarenheterna. Denna kunskap kan därefter, dels användas till att analysera hur olika problem uppstår, dels till att förutse problemen och därmed se till att de inte uppstår. Detta är de kriterier som NE anser vara utmärkande för en teori.

3.3 Fler aspekter

För att förstå den här rapporten är det ytterligare några aspekter som är viktiga att utreda. En sådan aspekt är att den ämnesdidaktiska teorin i matematik inte är ett outforskat område. Tvärtom, genom det arbete som utförs av Wiggo Kilborn först i svensk skola och därefter under de senaste tio åren i skolor i olika afrikanska länder, har vi en mängd värdefull kunskap att bygga vidare på. De flesta av de exempel som beskrivs i den här rapporten är hämtade från Kilborns forskning. Även om Kilborn kom långt på egen hand så är det mycket som återstår att göra för att få teorin mer generell och heltäckande.

En annan viktig aspekt är den ämnesdidaktiska teorins relation till utbildning och inlärning. Teorin är avsedd för lärare och avsikten är att lärare med dess hjälp skall kunna systematisera, förklara och förutsäga vad som händer inom undervisning och inlärning. Eftersom det territorium som beskrivs är skolans matematikundervisning så är det naturligt att relevanta exempel på teorins styrka och användbarhet kopplas till detta territorium. Det är ju eleverna och uppbyggnaden av deras kunskaper som är objektet för teorin.

En tredje aspekt är den ämnesdidaktiska teorins relation till ämnesdidaktiken i sin helhet. Eftersom didaktikens vad- och hur-frågor tar sin utgångspunkt i det som skall läras, så kommer ämnesdidaktik och ämnesdidaktisk teori att vara ömsesidigt beroende av varandra. Det kunskapsstoff som skall kommuniceras har inget värde i sig utan får sitt värde i relation till den individ som skall tillägna sig stoffet. Kommunikationen och formen för denna kommunikation blir därför avgörande för elevernas möjligheter att tillägna sig avsedd kunskap. Den ämnesdidaktiska teorin bör av det skälet omfatta, inte bara en systematisering av stoffet i sig utan även vilka val av metaforer eller konkretiseringsalternativ som i olika situationer är rimliga och kan leda till de avsedda målen. Det går därför inte att beskriva en ämnesdidaktisk teori utan att relatera den till ämnets didaktik.

4. Didaktik och ämnesdidaktik

Under de senaste årtiondena har det skett en successiv förändring av innebörden i orden metodik och didaktik. Det har också skett en uppdelning i vad som är ämnesdidaktik, dvs. didaktik med anknytning till ett skolämne, och allmändidaktik som är oberoende av skolämnenas särart och innehåll. Här görs ett försök att reda ut dessa begrepp.

Kommentar [WK1]:

4.1 Metodik och didaktik

Vid grundskolans införande 1962 skulle två olika utbildningstraditioner, realskolans och folkskolans, smältas samman. Samtidigt ställdes stora krav på att undervisningen skulle individualiseras och konkretiseras, vilket krävde en omfattande fortbildning av landets lärare. Detta ledde under grundskolans första decennier till en blomstringstid för svensk matematikmetodik. Som exempel på sådana satsningar kan vi nämna Deltaprojektet (Hermods och Skolöverstyrelsen 1969) som följdes av MALM- och LIMM-fortbildningarna. Det utgavs också ett antal böcker om matematikmetodik såsom Anderbergs (1983) *Matematikmetodik på högstadiet*, Liber/Utbildningsförlagets *Matematik i Grundskolan* (1983) och Kilborns (1981) *Vad vet fröken om baskunskaper*. Det var också under den här tiden som den matematikdidaktiska tidskriften *Nämnaren* kom till.

Nu, i efterhand, kan man konstatera att den metodik som då lyftes fram oftare syftade till att lösa pedagogiska problem för stunden, än till att bygga upp en konsistent kunskapsstruktur och att ge eleverna kontinuitet i matematikinlärningen. Det saknades med andra ord en teori som knöt samman olika idéer och som gav struktur och långsiktighet åt matematikundervisningens innehåll. Detta arv har satt spår i dagens matematikundervisning, dels i lärares användning av falska metaforer (se kapitel 7.4), dels i en manipulation av laborativa material vilka istället borde ha använts som ett konkretiserande verktyg i en planerad inlärning (se t.ex. Löwing & Kilborn 2002). Dessa frågor kommer att ges en mer ingående behandling längre fram i rapporten.

Även om man kan vara kritisk till den nyss nämnda metodiklitteraturens didaktiska kvalitet, så hade den ändå en förtjänst: Lärarutbildare och lärarfortbildare utnyttjade sin beprövade erfarenhet av skola och undervisning för att ge konkreta exempel på hur lärare kan undervisa inom olika moment. Det utvecklades på det sättet en informell systematisering av ett undervisningskunnande. Av det skälet kunde utbildningens innehåll på ett genomtänkt sätt omsättas i undervisningen, det kunde "verksamhetsförläggas". Idag förväntas den lärarstuderande bygga upp denna erfarenhet helt på egen hand. Det finns därför anledning att reflektera över vad Ball och Bass (2000) skriver om tron på att den lärarstuderande skall kunna konstruera sådan lärarkunskap när de lämnat utbildningen:

> We assume that the integration required to teach is simple and happens in course of the experience. In fact, however, this does not happen easily, and often not happens at all. (s. 86)

Under 1970-talet blev de problem som uppstod i grundskolans matematik- och NO-undervisning allt mer uppenbara, inte minst genom den forskning som bedrevs inom projekt som LMN (Svantesson, 1978), EKNA (Andersson, 1974), BMN (Lybeck, 1981) och PUMP (Kilborn, 1979a). Det blev genom denna forskning tydligt att elevers uppfattningar av olika naturvetenskapliga eller matematiska begrepp ofta skiljde sig markant från begreppen ifråga. Det blev också tydligt att många lärare inte förmådde uppfatta dessa skillnader och att de, även om de uppfattade dem, inte förmådde möta elevernas behov av kunskap. Ofta blev resultatet att matematikläraren, för att rädda sitt ansikte, lotsade eleverna förbi problemen istället för att reda ut dem med eleverna.

I anslutning till den ovan nämnda forskningen började svenska lärarutbildare mer systematiskt följa den internationella forskningen om elevers tänkande i matematik. Detta har lett till ett paradigmskifte när det gäller synen på undervisning i matematik. Man började ifrågasätta den traditionella, nedärvda ämnesmetodiken och betrakta undervisning och inlärning ur en mer vetenskaplig synvinkel. Det nya undervisningsvetenskapliga ämnet kallades *Ämnesdidaktik* eller *Fackdidaktik.*

4.2 Böckerna om fackdidaktik

Det egentliga genombrottet för Fackdidaktiken skedde vid två konferenser 1984, den ena i Marstrand och den andra i Karlstad. Konferenserna resulterade bl.a. i en bokserie *Fackdidaktik* i tre volymer (Marton, 1986). Den uppfattning om fackdidaktik som ges i dessa böcker har blivit normbildande för den svenska uppfattningen av begreppet ämnesdidaktik. (Observera att Marton använder termen Fackdidaktik och inte Ämnesdidaktik eftersom böckerna även behandlar förskola, yrkesutbildning och vårdutbildning som ju inte är några ämnen.)

I *Fackdidaktik, volym 1* ges en definition av begreppet didaktik. För att avgränsa ämnesdidaktiken från ämnesteorin skriver Marton under rubriken Metodik som ämnesteori:

> Ett annat alternativ innebär att det är ämnesteorin som delvis utgör ämnesmetodiken. … Men icke desto mindre är det väsentligt att skilja på ämnesteori och ämnesmetodik, alltså att medvetet skilja på exempelvis molekylärfysikens problem, och problem förenade med att få eleverna att förstå molekylärfysikens problem. (s. 31)

(Observera att Marton här använder ordet ämnesmetodik för vad vi idag kallar ämnesdidaktik.)

Om vi kopplar vad Marton skriver till ämnet matematik, så handlar det om skillnaden mellan att bygga upp en stringent matematisk teori och att få alla elever att var och en på sin nivå tillgodogöra sig motsvarande kunskap. I det förra fallet handlar det om att lösa ett problem i sig i det senare fallet om problemets relation till individ och omvärld.

I samma bok drar Marton också en gräns mellan fackdidaktik och allmändidaktik på följande sätt:

> Som redan Comenius klassiska definition antyder kan två delområden urskiljas inom didaktiken; dels har vi frågor som gäller val av innehåll, dvs *vad* det är som skall vara föremål för undervisning och dels har vi frågor som gäller behandling av innehåll, dvs *hur* man skall undervisa om det man har bestämt sig för att undervisa om. Det första delområdet kan sägas vara didaktikens läroplansteoretiska och det andra området dess undervisningsmetodiska komponent. Det kunskapsområde som var avsikten att avgränsa finns inom detta tudelade didaktiska fält. Men för att urskilja det måste ytterligare en distinktion göras. Didaktiska frågor - såväl av det läroplansteoretiska som av det undervisningsmetodiska slaget - kan dels ställas generellt och dels i förhållande till olika innehållsligt avgränsade kunskapsområden (t ex skolämnen). Vi skulle vilja kalla det förstnämnda *allmändidaktik* och det sistnämnda *fackdidaktik*. (s. 72)

> Utöver den tidigare nämnda snäva och vida definitionen av didaktik, som innebär att den handlar om undervisningens *vad* respektive dess *vad och hur* förekommer också åsikter om att didaktik bör omfatta såväl *varför*- som *vad*- och *hur*-frågor. … *Varför*-frågan refererar till de mål man vill uppnå genom ämnet ifråga, och därmed handlar det naturligtvis också om ämnets legitimitet. … Vi skulle dock vilja ge fackdidaktikens två komponenter en så inklusiv innebörd som möjligt. *Vad*-aspekten bör självklart omfatta frågor som gäller skolkunskapens idéhistoriska, kulturella och samhälleliga konstitution … *Hur*-aspekten bör förutom rent undervisningsmetodiska frågor …. även inbegripa problem som exempelvis har att göra med elevförutsättningar. …Vidare finns det *Varför*-frågor som bör ingå i didaktikens båda komponenter. (s. 73)

Den syn på didaktiken som Marton här lyfter fram överensstämmer i stort med det synsätt som många av oss ämnesdidaktiker har. Samtidigt ser vi i detta ett problem som ägnats allt för liten uppmärksamhet och det gäller vad-frågan. Marton tangerar problemet när han lyfter fram vikten av "att medvetet skilja på exempelvis molekylärfysikens problem, och problem förenade med att få eleverna att förstå molekylärfysikens problem". På den här punkten redovisar Johansson och Kilborn en annan uppfattning i *Fackdiaktik volym III* (Johanson & Kilborn, 1986) och Kilborn utvecklar senare denna syn i bokserien *Didaktisk ämnesteori i matematik* (Kilborn, 1989, 1990, 1992).

Att få elever att förstå molekylärfysikens problem är enbart i andra hand en metodisk fråga. En viktigare fråga är, enligt vår uppfattning, hur en sådan ämnesteori ser ut som gör det möjligt för elever att över huvud taget förstå molekylärfysik. Vi menar att vad-frågan blir relativt ointressant om det bara finns en enda, för akademiskt syfte utarbetad teori, att välja på. Det verkligt stora problemet består nämligen i att akademikerns teori sällan låter sig konkretiseras eller vardagsförankras - åtminstone inte när det gäller matematik. Detta framgår tydligt av *Nationalencyklopedins* (1994) beskrivning av matematik:

> **Matematik** …, en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling. Definitionen kan kommenteras på följande sätt. Matematiken är *abstrakt:* den har frigjort sig från det konkreta ursprunget hos problemen, vilket är en förutsättning för att den skall kunna vara *generell* dvs. tillämpbar i en mångfald situationer, men också för att den logiska giltigheten hos resonemangen skall kunna kartläggas.

Den intressanta frågan blir nu hur en didaktik skall se ut som möjliggör en konkretisering och vardagsförankring av ett stoff som redan frigjort sig från sitt konkreta ursprung. Man borde väl i skolans undervisning snarare utgå från stoffet sådant det tedde sig innan det frigjorde sig från det konkreta ursprunget? Detta kräver kunskaper om såväl matematikens historiska utveckling som gemene mans behov av matematik i dagens samhälle.

Man kan notera att Marton, ett antal år senare, tar upp just det här problemet, i boken *Om lärande* (Marton & Booth, 2000):

> Lärande - i bemärkelsen att erhålla kunskap om världen - betraktas ofta som ett framåtskridande, som börjar med att man förvärvar en del grundläggande fakta … och som går vidare genom att man bygger upp mer komplexa och avancerade former av kunskap utifrån, eller på grundval av, enklare former. (s. 9)
>
> Ur vår synvinkel går lärande i regel framåt från en odifferentierad och mindre sammanhängande förståelse av helheten, till en ökad differentiering och integration av helheten och dess beståndsdelar. På så sätt framskrider lärandet inte så mycket från delar till helheter som från helheter till helheter. För att uttrycka detta mycket enkelt: för att lära sig någonting måste man ha en aning om vad det är man lär sig. … De odifferentierade och osammanhängande helheter som den lärande greppar när han skall börja lära sig något, verkar förmodligen förvirrande och felaktiga när de bedöms utifrån den etablerade kunskapens kriterier. Men vid närmare eftertanke … visar sig dessa helheter, den lärandes ursprungliga idéer, vara ofullständiga snarare än felaktiga. (s. 10)

Som en konsekvens av detta, blir det intressant att klarlägga hur det går till när elever "förvärvar en del grundläggande fakta" och hur man som lärare hjälper dem att få "den lärandes ursprungliga idéer" till "helheter" om det inte finns en ämnesteori som ger struktur åt detta. Frågan är om inte dagens "kris" inom matematikundervisningen har sitt ursprung just i bristen på en sådan ämnesteori för undervisning, vilket i sin tur lett till att hur-frågan blivit överordnad vad-frågan. Som en konsekvens av detta försöker man i skolan lösa begreppsliga problem med hjälp av undervisningsmetodik. Man agerar som om intellektuella problem, t.ex. att få elever att uppfatta vissa begrepp, kan lösas genom att man förändrar arbetsform eller arbetssätt, t. ex. genom att låta eleverna arbeta åldersblandat eller i grupp.

4.3 Skolans kursplaner och didaktiken

Den nu gällande kursplanen för matematik (Skolverket, 2000a) speglar det dilemma som uppstår som en följd av att den inte tagit sin utgångspunkt i en ämnesteori som beskriver hur barn och ungdomar tillägnar sig matematik. Kursplanens mål pendlar i själva verket mellan en formell och en informell behandling av ämnet Detta verkar i sin tur leda till en osäkerhet bland lärarna eftersom de får svårigheter att tolka avsikten med och djupet i kursplanens mål. Svårigheterna blir uppenbara när man analyserar de intervjuer lärarstuderande i Göteborg genomfört med sina handledare. Frågorna har i första hand gällt hur handledarna tolkar följande uppnåendemål i kursplanen för det femte respektive det nionde skolåret.

- ha en grundäggande taluppfattning som omfattar naturliga tal och enkla tal i bråk- och decimalform. (s. 28)
- ha goda färdigheter i att kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med tekniska hjälpmedel. (s. 29)

Resultaten av intervjuerna visar på stora skillnader mellan hur olika handledare tolkade de här målen. Ännu större var skillnaderna mellan handledarnas tolkningar av målen och vad vi som lärarutbildare uppfattar som avsikten med målen. Observera att de handledare som har dessa problem med att tolka kursplanens mål tillhör en av lärarutbildningens viktigaste personalgrupper, den som skall hjälpa de studerande att i praktiken omsätta de kunskaper de tillägnat sig under utbildningen. Dessa handledare är samtidigt nyckelfigurer i de verksamhetsförlagda delarna i utbildningen. Vår tolkning av resultaten är att många av de lärare som arbetar med elever i skolår 1 - 6 själva har problem med att förstå innehållet i en formellt beskriven matematik, vilket i sin tur leder till problem för dem med att uppfatta kursplanens mål och vart målen avser att leda på längre sikt.

Det verkar också som om många lärare, när de möter problem av matematisk karaktär i undervisningen, snarare försöker att komma runt problemen genom att dölja dem bakom metaforer och laborativa metoder, än att ta tag i problemen och ge dem en långsiktig lösning. Detta uppfattar vi som en konsekvens av kursplanens blandning av formell och informell matematik. Kanske skulle lärarnas dilemma lösas om det i kursplanen funnes en klar balans mellan vad som är mer eller mindre viktigt för olika individer och en idé om hur man kan hjälpa elever att gå från konkret och vardags-anknuten matematik till en mer abstrakt och formell. Istället beskriver kursplanen (Skolverket, 2000a) två helt skilda världar. Den inleds t.ex. med att beskriva en konkret och vardagsförankrad matematik:

> Grundskolan har till uppgift att hos eleven utveckla sådana kunskaper i matematik som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att kunna tolka och använda det ökande flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället. Utbildningen skall ge en god grund för studier i andra ämnen, fortsatt utbildning och ett livslångt lärande. (s. 26)

Efter detta syfte följer nya syften:

> Matematiken är en viktig del av vår kultur och utbildningen skall ge eleven insikt i ämnets historiska utveckling, betydelse och roll i vårt samhälle. Utbildningen syftar till att utveckla elevens intresse för matematik och möjligheter att kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer. Den skall också ge eleven möjligheter att upptäcka estetiska värden i matematiska mönster, former och samband samt att uppleva den tillfredsställelse och glädje som ligger i att kunna förstå och lösa problem. (s. 26)

Under rubriken Ämnets karaktär och uppbyggnad kan man sedan läsa att "Matematik är en levande mänsklig konstruktion som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition." följt av:

> Matematikämnet utgår från begreppen tal och rum och studerar begrepp med väldefinierade egenskaper. All matematik innehåller någon form av abstraktion. Likheter mellan olika företeelser observeras och dessa beskrivs med matematiska objekt. Redan ett naturligt tal är en sådan abstraktion. (s. 27)

Man får ett intrycka av att kursplanen skrivits på det sättet för att på samma gång tillfredsställa två helt olika intressegruppers syn på matematik. Något försök till syntes eller prioritering har inte gjorts. Kanske har man tänkt sig att detta är en didaktisk eller undervisningsmetodisk fråga som läraren själv skall lösa? Är det mot denna bakrund rimligt att kräva

> … att lärarna förväntas själva utveckla nya sätt att organisera och leda arbetet i skolan. Hur eleverna skall nå målen är det lärarens uppgift att avgöra. (Lärarutbildningskommittén, 1997)

Hur skall läraren kunna förverkliga detta utan en teori för hur ämnes-innehållet kan anpassas till den verksamhet man skall leda?

En av poängerna med den ämnesdidaktiska teori vi vill fortsätta att utveckla är just att den knyter samman de formella och informella inslagen i undervisningen och att den utgör en brygga mellan ämnets olika komplexitetsnivåer. Utan en ämnesteori som visar hur man kan knyta samman de här två världarna blir det svårigheter såväl med *vad* man skall välja att undervisa om som *hur* en undervisning om detta kan gå till.

5. Var står vi i dag?

Bokserien om *Fackdidaktik* kom att ge lärare, och inte minst lärarutbildare, en ny syn på undervisningen i matematik och NO-ämnen. Man började intressera sig för elevers tänkande, hur elever uppfattar olika begrepp och inte minst vilka strategier de använder för att lösa olika problem. Om detta skrev Björn Andersson (1986):

> Det finns en påtaglig klyfta mellan elevers tänkande och kursernas krav. … Intuitivt kände vi på oss, att klyftan berodde på att elevernas utgångsläge inte var känt. Visste man detta, så kunde man börja där eleverna befann sig. …
>
> Det blev alltså tre frågor som kom att stå i fokus för EKNA-gruppens arbete:
>
> 1. Viket är elevens begreppsliga utgångsläge i fysik och kemi?
> 2. Vad kräver kurserna dvs. vilket är det av skolan önskade läget?
> 3. Hur, och i vilken utsträckning, kan man stimulera eleven att gå från sitt utgångsläge till det önskade läget? (s. 119).

Vid den här tidpunkten var relativt få av landets lärarutbildare disputerade. När det senare satsades på en kompetensutveckling av lärarutbildare, så blev denna ofta ensidigt inriktad mot elevers tänkande. Ett sådant arbete fick ett starkt stöd, inte minst vad gäller ämnet matematik, av den omfattande forskning om elevtänkande som bedrevs utomlands, främst i USA. Den här typen av forskning är värdefull, men det är också viktigt att den didaktiska forskningen inte ägnar sig så ensidigt åt "elevens begreppsliga utgångsläge" att det inte blir någon kraft över till att beskriva hur resultatet av detta forsknings- och utvecklingsarbete kan användas för att "stimulera eleven att gå från sitt utgångsläge till det önskade läget". För att förändra och anpassa lärarutbildningen till skolans behov krävs därför mer forskning av den typ som bedrivs av gruppen kring Björn Andersson. Här utvecklar man idéer kring hur tidigare utförd forskning om elevers tänkande och uppfattningar kan utvecklas till strategier för undervisning (Se http://na-serv.did.gu.se). Ett liknande arbete har utförts av Wiggo Kilborn i Sydafrika och Moçambique (Kilborn, 1999 och 2002)

5.1 Allmändidaktik och ämnesdidaktik

Vad som hände under 1980/90-talen, inte minst ur Göteborgs horisont, var att ämnesdidaktiken, trots boken om Fackdidaktik och trots alla satsningar på elevtänkande inte fick det genomslag i lärarutbildningen som man skulle förväntat sig. Det blev istället allmändidaktiken som blev mest uppmärksammad och det var allmändidaktikerna som lyckades bäst med att fär gehehör för sitt budskap (Se t.ex. Kroksmark, 1987, Bengtsson & Kroksmark, 1993, Lehndals & Runesson, 1995, 1996 och Strömqvist, 1997). Detta medförde i sin tur att vad-frågan inom undervisning (och lärarutbildning) mer kom att handla om val av arbetsformer och arbetssätt än om hur man kan förändra matematikundervisningens innehåll. Hur-frågan kom samtidigt att vinklas över från att finna en innehållsrelaterad lösning på undervisningsproblem till hur man kan undvika att utsätta eleverna för problemen ifråga. Ett exempel är att man, istället för att se över nuvarande algoritmer för de fyra räknesätten, och att ge klarare mål och metoder för dem, snarare undviker att behandla dem eller direkt använder en miniräknare. Ett annat exempel är bråkräkning som anses vara för svårt för eleverna, varför man undviker bråk istället för att se över behov och metoder. (Mer om detta i Löwing & Kilborn, 2002 kapitel 9.) Detta ger i sin tur negativa konsekvenser såväl för elevernas förståelse av decimaltal som för deras arbete med algebra.

Den här trenden, att satsa på allmändidaktik på bekostnad av ämnesdidaktik, har indirekt beskrivits av Alexandersson (1994) i hans avhandling *Metod och medvetande*. Han har i sin forskning studerat tolv erkänt kompetenta lärares undervisning. Vad Alexandersson kommer fram till är att bara en av dessa tolv lärare fokuserar uppmärksamheten på *innehållet och eleven*, dvs. på elevens förmåga att tillägna sig ett innehåll. De övriga elva lärarna fokuserar på *metoden och eleven*. dvs. på arbetssätt och arbetsformer. Han skriver så här:

> Goda ämneskunskaper är en förutsättning för att lärarna skall kunna ta utgångspunkt i ett *tänkt* innehåll. Skall till exempel en uppfattning om ett specifikt innehåll urskiljas eller fokuseras hos eleven, måste läraren själv ha tillräckliga kunskaper om ämnet. Först då kan han eller hon veta vad som skall urskiljas, vad som är perifert, hur olika principer inom ämnet är relaterade till varandra och hur dessa grundläggande principer kan presenteras. Genom en djupare ämneskunskap kan läraren förklara och skapa analogier när ett specifikt innehåll diskuteras och skall förmedlas. Men varken gedigna ämneskunskaper i sig eller väl utvecklad metodisk förmåga är tillräckliga. Det är hur dessa två aspekter av undervisning förenas som är central, vilket denna studie visar. (s 233)

Det enda egentliga genomslag den ämnesdidaktiska forskningen fått i skolans matematikundervisning är kopplat till elevers tänkande och problemlösning. Problemlösandet fick sitt egentliga genombrott i Sverige i samband med ett besök av amerikanen Frank Lester (1988). De aktiviteter som byggts upp kring problemlösning har emellertid även de fått en allmändidaktisk slagsida som knappast bidragit till ett avsett kunskapsinhämtande. Problemlösning således sker ofta i grupp och man verkar anse att alla lösningar är lika bra, att inget är rätt eller fel och att eleverna själva skall konstruera sina problem. Det som saknas är i själva verket klara mål och syften för problemlösandet. Finns det en progression? Lär man sig något nytt eller ältar man bara samma problem hela tiden? Är problemlösning ett mål eller ett medel …? (Mera om detta i Löwing & Kilborn 2002 kapitel 7)

Pimm (1987) är en av de få forskare som uppmärksammat problemet med att problemlösandet gått över styr. Han beskriver i boken *Speaking Mathematically* hur lärare (och lärarutbildare) ofta blandar samman form och innehåll och menar att man tappat bort vad som är poängen med problemlösning. För att illustrera detta tar han ett exempel där elever skall konstruera egna uppgifter till additionen 4,6 + 5,3 = 9,9. En del av de uppgifter eleverna presenterar var givetvis intressanta, men de flesta var rutinartade och triviala upprepningar av vad eleverna redan kunde:

- James had 4.6 sweets. His best friend gave him 5.3 sweets and he has 9.9 sweets altogether.
- John had 4.6 videotapes he sold them and had enough money to buy 5.3 bags of sweets and he then calculated up how much he had and he had 9.9.
- John had 4.6 pages of a book left to read and his father had 5.3 pages to read so between them they had 9.9 pages left to read. (s. 12, 13)

Pimm kommenterar denna märkliga aktivitet så här:

> … these stories all exhibit the apparent irrelevace at one level of the surrounding story in mathematics classes. The stories do not have to be plausable or even make sense provided they contain the requisite numbers and guide to the operation. (s. 13)

Genom den här typen av aktivitet, där läraren inte kritiskt granskar de olika uppgifterna och diskuterar dem med eleverna, så är risken stor att matematiken på sikt kommer att framstå som ett meningslöst tidsfördriv istället för det ovärderliga instrument den i själva verket är.

Hur ser då detta ut i svensk skola? Kontrollerar en svensk lärare relevansen i de uppgifter eleverna konstruerar och diskuterar dess innebörd med dem? Vilken uppfattning får i annat fall eleverna om matematik om de möter den ovan beskrivna typen av happenings? Vilket språk för matematik bygger eleverna i så fall upp och vilken precision får detta språkbruk? Men framför allt, vad är egentligen målet med problemlösandet? Handlar det om individualisering och i så fall av vad? Självklart skall svenska elever lösa problem. Men det måste finnas ett mål med det. Man blir ju inte bättre som problemlösare genom att konstruera och lösa meningslösa problem eller problem som man redan behärskar.

En intressant kritik av hur problemlösningen i Sverige har spårat ur ges av Wyndhamn m.fl. (2000) i boken *Problemlösning som metafor och praktik*. De skriver bl.a. om problemlösning i bokens epilog:

> Vi har noterat den stora skillnad som föreligger mellan den normativa användning av begreppet i exempelvis läro- och kursplaner och den mer deskriptiva återspeglad i verksamheten i klassrummet och dess resultat. Problemlösning är för det stora flertalet lärare det tillfälle då man löser uppgifter med text från läroboken vad som än sägs i olika styrinstrument. (s. 319).

Men man skriver också:

> Vi hävdar att problemlösning för många lärare oftast är metafor för ett arbetssätt. (s. 308)
>
> Det finns en annan tydlig aspekt på problemlösning nämligen problemlösning som "hjärnjympa". Det spelar då ingen roll vilket problem det är som skall lösas. Innehållsaspekten är borta. En "kluring" mister ju också sin fräschör så fort lösningen hittats eller omtalats. (s. 307).

Att problemlösandet ser ut så här i skolan är inte så konstigt. Problemlösning har enbart blivit ett lös tråd i svensk matematikundervisning. För att eleverna skall få det utbyte av problemlösandet vilket förmodas äga rum enligt olika styrdokument, så krävs det att denna lösa tråd vävs in i en ämnesteori som beskriver syfte och poänger med problemlösandet i undervisningen.

5.2 Situationen i USA - The Teaching Gap

En intressant utvärdering av forskningens och läroplansreformernas inverkan på didaktiken och på skolans arbete har gjorts av Stigler & Hiebert (1999) i boken *The Teaching Gap.* Boken är en fristående uppföljning av boken *The Learning Gap* (Stevenson & Stigler, 1992). I båda böckerna jämför man undervisningen i USA med undervisningen i asiatiska länder. (I *The Teaching Gap* igår även Tyskland i jämförelsen.) Vad man bl.a. intresserade sig för var varför japanska elever är så överlägsna de amerikanska i matematik? Efter att ha studerat och analyserat ett stort antal videoinspelade lektioner jämför man i *The Teaching Gap* undervisningen i USA, Tyskland och Japan. Tanken är att man genom att studera den variation man ser, skall kunna dra slutsatser om hur man kan förbättra amerikansk matematikundervisning. Efter att ha analyserat de amerikanska videobanden konstaterar man emellertid, till sin förvåning, att all den matematikdidaktiska forskning som skett under de senaste decennierna i USA, med åtföljande reformarbete, inte har satt några djupare spår i skolans undervisning:

> Allthough most U.S. teachers report trying to improve their teaching with current reform recommendations in mind, the videos show little evidence that change is occurring. Furthermore, when teachers do change their practice, it is often in only superficial ways. (s. 12)
>
> When we looked at the videos, we found little evidence of reform, at least as intended by those who had proposed the reforms. (s. 106)

Detta är intressant. De som skriver kursplaner, organiserar fortbildning och förnyar lärarutbildning verkar ta för givet att deras idéer automatiskt leder till en önskad förändring. Men så är det uppenbarligen inte - åtminstone inte i USA. Men varför lyckas då lärarna inte följa de nya rekommendationerna - och varför har svenska skolelevers resultat i matematik ständigt gått bakåt (se t.ex Skolverket 2000b, 2001) sedan man bestämt att vi skulle få "Europas bästa skola"? Hiebert och Stigler besvarar frågan så här sett ur ett amerikansk perspektiv:

> The American approach has been to write and distribute reform documents and ask teachers to implement the recommendations contained in such documents. Those who have worked on this problem understand that this approach simply does not work (s. 12)

Så varför skulle det fungera i Sverige? De ger också följande exempel:

> True, NCTM recommends that calculators be introduced in the curriculum, because among other reasons, they can save computing time so students can focus their attention on problem solving and conceptual understanding. But this was not the way calculators were being used in this particular teacher's classroom. (s. 106)

5.3 Situationen i Sverige

Vi återvänder nu till Sverige, till kursplanen i matematik och lärares syn på undervisning. Trots all den didaktiska forskning som ägt rum under senare år konstaterar man i rapporten *Hög tid för matematik* (NCM, 2001)

> Matematiklärarna har inte fått stöd och resurser att utveckla en intresseväckande och stimulerande undervisning som möter dagens elever och konkretiserar aktuella kursplaner utan har fått förlita sig på traditionella arbetssätt och hjälpmedel. (s. 12)
>
> Skolor och lärare förmådde inte svara mot de nya kursplanernas mål och en stor andel "enskild räkning" har lett till allt fler utslagna elever. Det finns en trend att lärare inte skall undervisa utan handleda och detta har drabbat matematiken särskilt hårt på grund av det starka läromedelsberoendet och att många lärare saknar relevant utbildning. (s. 13)

I en kommentar till kursplaner och betygskriterier i matematik skriver man vidare (NCM 2001):

> Nuvarande kursplaner ger inte direkt vägledning för hur undervisningen i matematik skall gå till och ger inte tillräckligt bra underlag för diskussioner vid tex stadieövergångar. … För att lokalt utvecklingsarbete skall kunna ske på ett professionellt sätt krävs kompletterande underlag till kursplanerna. (s. 19)
>
> Det har tex diskuterats hur vi skapar balans och integration mellan matematikens kreativa, problemlösande aktiviteter och inslag som stödjer elevernas begreppsbildning och förtrogenhet med matematikens symbolspråk. (s. 20)

Detta kan tolkas så att den didaktiska forskningen inte når skolan i Sverige heller. Ett skäl kan vara att dagens matematikdidaktiska forskning i första hand handlar om inlärning (learning) och mycket lite om undervisning (teaching). Kartläggning av elevers tänkande ger ett nödvändigt men långt ifrån tillräckligt underlag för att förändra lärarutbildningen och därmed skolans undervisning. Ett annat skäl till att forskningen inte når skolan kan vara att lärarutbildares arbetssituation inte ger någon tid över till att omsätta forskningsresultat på ett sådant sätt att de kan leda till en förändring av undervisningens innehåll. De förändringar som skett inom skolundervisningen har därför, som tidigare nämnts, istället blivit inriktade mot alternativa grupperingar, arbetssätt och arbetsformer.

Eftersom lärare (enligt NCM) saknat stöd för att förändra matematikundervisningens innehåll i enlighet med den senaste kursplanen och "har fått förlita sig på traditionella arbetssätt och hjälpmedel" har resultaten av matematikundervisningen successivt förändrats.

> Resultaten från ämnesproven i matematik skolår 9 och kursproven i gymnasiet oroar (Skolverket, 2000b, Riksdagen, 2000). 16% av eleverna nådde inte upp till kravet för betyget Godkänd på det aktuella grundskoleprovet, en tydlig ökning från föregående år. Andelen elever utan slutbetyg i matematik från grundskolan har också ökat, om än inte i motsvarande grad. …
> Jämfört med föregående prov på A-kursen och B-kursen så är resultaten för vårterminen 2000 avsevärt sämre. …På A-kursprovet är andelen IG högre än 60% på sju av gymnasieskolans program. (NCM 2001 s. 55)

Man kan sammanfatta det här avsnittet så, att de satsningar som gjorts på didaktisk forskning och på nya kursplaner inte har gett några påtagliga resultat i skolans matematikundervisning. Det som saknas verkar vara en konsolidering av de kunskaper som hittills forskats fram, parat med en forskning som förklarar vad som sker, eller inte sker, vid undervisningen i våra klassrum. Forskning kring innehållet i undervisningsprocessen (alltså vilket ämnesinnehåll lärarna kommunicerar med eleverna och på vilket sätt detta sker) verkar idag vara ett försummat område.

Skolans undervisning är territoriet för den ämnesdidaktiska forskningen. Det betyder att lärare som saknar kunskaper i en sådan ämnesteori får problem med att tolka och hantera olika elevers förmåga att uppfatta och lära ett ämnesinnehåll. Detta leder i sin tur till begränsade möjligheter att förändra matematikundervisningen i linje med de krav som ställs i dagens läroplaner Det är mot denna bakgrund inte så konstigt att lärarna "fått förlita sig på traditionella arbetssätt och hjälpmedel" och att de låter eleverna syssla med "enskild räkning" som i sin tur leder till "det starka läromedelsberoendet" som man anger som skäl till problemen i NCM-rapporten (2001).

6. Vad innebär en ämnesdidaktisk teori?

Det har ofta tagits för givet att en akademisk matematikteori ger ett adekvat underlag för den ämnesdidaktik som krävs när man i skolan skall bedriva undervisning i matematik. Vi delar inte den uppfattningen. Vad den akademiska ämnesteorin kan ge är en klarare syn på matematiken som sådan, något som blir viktigt för den som undervisar på gymnasieskolans C, D och E-kurser. Värdet av denna kunskap blir emellertid allt mindre ju yngre elever man undervisar. Under större delen av grundskolan är behovet större av en teori som förklarar hur eleverna kan lära sig matematik på olika sätt, för olika behov och utgående från olika villkor.

6.1 Behovet av en teori

Med tanke på all den forskning och fortbildning som på senare år skett inom det matematikdidaktiska området så kan det verka underligt att så lite av resultaten har satt spår i skolans undervisning. Sedan ämnesdidaktikens "genombrott" under 1980-talet så verkar snarare elevresultaten i ämnet matematik ha gått bakåt (Skolverket, 2000, 2001). En av orsakerna till detta kan vara att forskningen hittills enbart gett små öar av ämnesdidaktiska kunskaper. Det som förenar dessa öar är en akademisk ämnesteori som för länge sedan blivit så formell och fylld av symboler att de flesta människor inte förmår uppfatta den. Thompson (1986) beskriver detta så här:

> Den naturvetenskapliga undervisningens kris ligger delvis i att modern vetenskap brutits loss från de föreställningar som styrde den grekiska vetenskapens utveckling. Modern naturvetenskap och matematik riskerar att i undervisningen stelna till en rigid symbolism. Å andra sida är det just denna symbolism som har lett till naturvetenskapens och matematikens exempellösa framgångar, som resulterat i vår moderna teknologi. Men priset får betalas i pedagogiken. (s. 27)

Det grundläggande problemet består således, enligt vår uppfattning, i att didaktikens vad- och hur-frågor tar sin utgångspunkt i en teori som i många stycken verkar vara lika svårbegripliga för många lärare som för deras elever. Detta didaktiska dilemma förklarar i sin tur den brist på struktur och systematik som präglar en stor del av lärarutbildningen och lärarfortbildningen i ämnet.

Redan vid konferensen om fackdidaktik i Marstrand 1984, lyfte Johansson och Kilborn fram det här problemet och efterlyste en ämnesdidaktisk teori (Johansson & Kilborn, 1986 s. 92 - 93). Tanken var att en sådan teori skall beskriva hur lärare kan hjälpa barn och ungdomar att successivt bygga upp en begreppsvärld som både hänger ihop och är utvecklingsbar. Kilborn vidareutvecklade senare denna idé i sina böcker om didaktisk ämnesteori i matematik (Kilborn 1989, 1990 och 1992). En av poängerna med dessa böcker är att en hel del av de grundläggande idéerna inom matematiken kan beskrivas, och har tidigare i historien med framgång beskrivits, med ett enklare språk och på ett sätt som tillåter en konkretisering och koppling till omvärlden. Att detta är rimligt och möjligt beskriver även professorn i matematik Lennart Carlesson (1968) på följande sätt:

> Det brukar tas som axiom att matematik inte kan populariseras, men just denna tes bör man ifrågasätta. Vad som kan förklaras och vad som inte kan förklaras beror på vad som kan tas som utgångspunkt. (s. 9)
>
> Vi kan sätta upp invecklade system som ger innebörd åt talet 1, tecknet + o.s.v., helt oberoende av vår vanliga tolkning. … Men vi kan inte tala om systemet eller ge det ett sanningsinnehåll utan att falla tillbaka på vår erfarenhet om vardagligt räknade. (s. 13)

Kilborn menar att elever i olika åldrar har förmåga att uppfatta begrepp och att tillägna sig begrepp på olika sätt och på olika nivåer. De begrepp (även om de är av ett preliminärt slag) som man presenterar för eleverna och den struktur man som lärare ger kunskapen måste emellertid på varje nivå vara konsistent och, åtminstone till en början, även konkretiserbar. Det får alltså inte handla om att ge lösa förklaringar som håller för stunden men som senare visar sig vara motsägelsefulla. Det måste handla om helheter, preliminära helheter av begrepp, som efter hand kan modifieras och vid behov göras mer abstrakta. Man kan i detta sammanhang erinra om att det som just skrivits har starkt stöd i det citat av Marton och Booth (2000 s. 9, 10) som återfinns i avsnitt 4.2. En ämnesdidaktisk teori skulle bidra till att göra de preliminära och osammanhängande helheter som eleverna för stunden uppfattar, mer logiska, fullständiga och utvecklingsbara ur elevernas synvinkel.

Även Thompson (1986) ger stöd för denna uppfattning. Han skriver t.ex. så här om matematisk teoribildning:

> För det första måste då konstateras att matematisk sanning består i en motsägelsefrihet och fullständighet, att kriteriet med andra ord är ett inre kriterium. En matematisk teori kan med avseende på sin sanning inte avgöras mot något givet yttre kriterium. (s. 16)

Detta rimmar inte särskilt väl med kraven i grundskolans kursplanens vad gäller konkretisering och vardagsförankring. Ur en sådan teori kan man knappast vaska fram varken didaktikens vad- eller hur-frågor. Men Thompson skriver också så här:

> En mer renodlat evolutionär syn framställs av Toulmin (1972). Han betonar kontinuiteten i den vetenskapliga kunskapens utveckling och menar att alla förändringar är gradvisa. På samma sätt som arter utvecklas ur tidigare arter genom kontinuerliga förändringar, är vetenskapens utveckling en fråga om *begreppsliga omvärderingar* … och omtolkningar av fenomenen. (s. 13)
>
> Men den toulminska uppfattningen om rationalitet i den vetenskapliga processen motsvarar på inlärningsnivå det kategoriska kravet att *eleven måste övertygas om det rationella i att överge eller modifiera en uppfattning till förmån för en annan*. (s. 15)

Även för detta, alltså för hur barn och ungdomar bygger upp en kunskap i matematik och naturvetenskap, behövs en teori. I denna teori blir en viktig fråga hur de begreppsliga stegen ser ut och hur det går till att övertyga eleverna om behovet av att omvärdera sina kunskaper. (Ett konkret exempel på hur detta kan gå till detta finns i Löwing och Kilborn, 2002 exempel 7.5.4.)

Ytterligare ett argument för att den akademiska matematikteorin inte är ett tillräckligt instrument som teori för skolans matematik finner man i *Skola för bildning* (SOU 1992:94).

> Det är framför allt tre aspekter av kunskap, vars betydelse kommit allt mer i fokus, som vi vill lyfta fram. För det första kunskapens *konstruktiva* aspekt. Kunskapen är inte en avbildning av världen, utan ett sätt att göra världen begriplig. … För det andra kunskapens *kontextuella* aspekt. Kunskapen är beroende av sitt sammanhang, vilket utgör den (tysta) grund mot vilken kunskapen blir begriplig. För det tredje, kunskapens *funktionella* (instrumentella) aspekt, kunskap som redskap. (s. 59)

Den här typen av empirisk kunskap kan man inte härleda från matematikerns deduktiva teorier.

6.2 Ett första steg mot en ämnesdidaktisk teori

Så här beskrivs en ämnesdidaktisk teori av Johansson och Kilborn (1986):

> Det är vår uppfattning att den grundläggande orsaken till dessa skillnader i val av innehåll ligger i det faktum att vi saknar en *didaktisk ämnesteori*, en ämnesteori för *skolämnet* matematik. Denna teori går inte att härleda ur den akademiska disciplinen matematik. …(s. 92)
>
> De instrument man på den nivån har utvecklat är mycket trubbiga och okänsliga hjälpmedel för vardagsmänniskan när hon skall försöka greppa sin omvärld. En didaktisk ämnesteori för skolämnet matematik går heller inte att härleda från erfarenheter av några begränsade fenomen, som man ofta arbetar med inom den pedagogiska och inlärningspsykologiska forskningen…. Istället behöver vi en teori som innehåller *omvärldsrelaterade* kunskapsstrukturer och som samtidigt är väl anpassad till kunskaper om hur lärare och elever uppfattar detta innehåll. (s. 93)

Det ges också några exempel på detta, exempel som senare har utvecklats i Kilborn (1989, 1990 och 1992) och i Löwing & Kilborn (2002, 2003):

> Både multiplikation som upprepad addition och som ett rutnät har stora fördelar inom olika delar av matematikämnet. Men de har samtidigt stora begränsningar när vi t.ex. kommer till multiplikation av tal i bråkform eller decimalform. Det blir också stora problem när man skall förklara att produkten av två storheter kan ge en helt ny storhet. Detta inträffar t ex när man genom multiplikation av en hastighet och en tid får en sträcka. Samma sak gäller för divisionsbegreppet. …(Kilborn, 1986 s. 93)

Beskrivningen av en didaktisk ämnesteori avslutas med orden:

> Vi måste skapa forsknings- och analysmetoder som hjälper oss att bygga upp helhetsstrukturer för skolmatematikens innehåll, giltiga inte bara inom lokala fält eller för enskilda kurser eller stadier. Vi måste utveckla beskrivningskategorier som ger

> oss kontroll över kvalitativa skillnader mellan olika typer av innehåll. I dagsläget finns enbart fragment av en sådan kunskapsbildning. (s. 93)

I samband med införandet av den nya grundskollärarutbildningen, 1988, uppstod ett behov av en skolanpassad ämnesteori i matematik. Under en mycket kort tidsperiod skrev då Kilborn en serie böcker avsedda för utbildning av grundskollärare som undervisar i matematik. I den första delen av bokserien *Didaktisk ämnesteori i matematik* (Kilborn, 1989) inbjuder Kilborn till en dialog inom detta viktiga område:

> Att bygga upp en didaktisk ämnesteori avsedd för utbildning av lärare är inte någon lätt uppgift. Den här boken skall därför uppfattas som ett exempel på hur en didaktisk ämnesteori kan struktureras. Av förklarliga skäl får ett material av det här slaget inte uppfattas som färdigt och i alla delar helt genomtänkt. Men någon måste börja skriva den här teorin - och det har hittills varit ett enmansarbete utfört på lediga stunder. Min förhoppning är att fler personer på sikt visar intresse för detta och arbetar vidare inom det här området. (s. 8)

Först nu, nästan 15 år senare, uttrycks från olika håll, såväl nationellt som internationellt, ett behov av den här typen av teori. I Sverige är det i första hand NO-sektorn som engagerar sig i frågan. I introduktionen till boken *Kommunicera naturvetenskap i skolan* (Strömdahl, 2002) skriver t.ex. Strömdahl:

> Ett hinder för att teknisk/naturvetenskaplig kunskap skall ses som en kulturyttring utöver en elementär populärvetenskaplig nivå är att den anses vara svår att kommunicera, kall och rationell. Kommunikationsproblemet hänger bl.a. samman med att naturvetenskapens språk och karaktär är av ett slag som ofta inte sammanfaller med det vardagliga sättet att tänka och resonera. Problemet kommer särskilt tydligt till uttryck i skolans undervisning och lärande i NO-ämnena. (s. 8)
>
> Sambandet mellan den vardagligt upplevda världen och den naturvetenskapliga modellen av denna värld är nämligen inte så enkel som ofta framhålls i ivern att rättfärdiga att de naturvetenskapliga ämnena med lätthet kan knytas till de studerandes vardagsverklighet. Tvärtom pekar Wolpert (1993) på naturvetenskapens onaturliga karaktär genom att den går utanför vardagsverkligheten och sunt förnuft, bygger på idealiseringar (Nersessian, 1992) är abstrakt och matematisk. (s. 9)

Vad Strömdahl här lyfter fram är att den naturvetenskapliga teoribildningen gör den abstrakt, språkligt svår och svår att vardagsanknyta samt att den dessutom strider mot sunt förnuft. Hur är det då möjligt att med en sådan teori som underlag få rimliga svar på de didaktiska vad- och hur-frågorna? Är det inte naturligt att en sådan teori leder till alla de missuppfattningar som beskrivs i boken. Även inom det här fältet torde det vara befogat med en ämnesteori anpassad till skolans behov. Detta får stöd i boken:

> Andersson företräder en uppfattning att elever på grundskolan skall ges funktionella begrepp i en vardagskontext (samhälls/medborgarperspektiv) som ligger mellan vardagsbegrepp och de naturvetenskapliga begreppen. Detta reser den viktiga didaktiskt normativa frågan om vad som är möjligt och önskvärt att kommunicera till

> en grupp av individer med en viss ålder, generell utvecklingsnivå, förmåga, intresse, motivation, etc. (s. 14, 15)

I en artikel i samma bok ger Björn Andersson (2002) ett konkret exempel på vad han menar:

> Då vi söker efter nya sätt att undervisa om energi i grundskolan möter vi ett tvångs-villkor. Området energi *måste* enligt läroplanen ingå i grundskolans undervisning. Men en fysikaliskt stringent introduktion och uppbyggnad, baserad på definitioner av kvantitativa begrepp, är inte möjlig. Därför bör vi gå tillväga på ett annat sätt än det som naturvetare är vana vid. (s. 209)

Andersson skriver också på ett annat ställe i boken:

> Av föregående resonemang framträder den högst avsevärda klyfta som råder mellan vardaglig och vetenskaplig begreppsvärld när det gäller energi. Det stringenta veten-skapliga begreppet kräver kunskaper i fysik och matematik som bara finns i N-programmens kurser. Men alla behöver ett funktionellt energibegrepp för liv och samhälle som är bättre än vardagsföreställningarna. Hur skall detta se ut? (s. 202)

Vad Andersson efterlyser i sin artikel är det vi uppfattar som en ämnes-didaktisk teori. En sådan teori kan ge struktur åt innehållet i undervisningen och därmed göra det möjligt för lärare att hos eleverna bygga upp begrepp som dels "är bättre än vardagsföreställningarna", dels är begripliga för vardagsmänniskan. Denna teori skulle samtidigt tjäna som förbindelselänk mellan vardag och vetenskap, en nog så viktig funktion i vårt alltmer teknikberoende samhälle.

6.3 Internationellt stöd för en ämnesdidaktisk teori

Allt fler forskare ifrågasätter idag rimligheten av att man utgår från aka-demikerns uppfattning om matematik i skolans undervisning. En av dem är Pimm (1987) som i boken *Speaking Mathematically* tar upp språkets roll. I bokens inledning citerar han t.ex. den engelska Cockcroftrapporten som framhåller att

> … it is the fact that mathematics can be used as a powerful means of communication which provides the principal reasons for teaching mathematics to all children. (s. xvii)

Det här är en formulering som starkt påminner om vad som står i den sven-ska kursplanen för grundskolan. Detta är gott och väl, men Pimm påpekar att Cokcroft glömt en viktig detalj nämligen att tala om <u>vad</u> som skall kommuniceras:

> The report, unfortunately, did not then discuss in detail *what* it was that was to be communicated, but mathematics can be profitably seen as both medium and message, with the two often inextricably and deliberatly mixed. (s. xvii)

Pimms påpekande är inte minst viktigt med tanke på matematikens abstrak-ta och formella natur och att matematikens språk ofta skiljer sig markant från vardagsspråket. Till detta kommer att matematikens termer, symboler och begrepp är intimt länkade till varandra. Som en följd av kommunikationens viktiga roll i matematikundervisningen är därför risken stor att man med språkets hjälp bygger oöverstigliga hinder för elevers möjligheter att förstå matematiska modeller. I en ämnesdidaktisk teori blir därför valet av språk och symboler, liksom hur man beskriver begrepp, viktiga inslag.

Vad gäller elevernas språk pekar Pimm (liksom Vygotsky, 1986) på två olika användningar av språket,

> …nameley talking to communicate with others and talking for themselves. … *Talking for others*, in an attempt to make someone else understand something or to pass on some piece of information … *Talking for themselves* … to help organize their own thoughts. (Barnes (1976) offers similar categories which he terms *explanatory* and *exploratory* talk respectively.) (s. 23,24)

Pimm diskuterar mot denna bakgrund hur formell matematikundervisningen egentligen behöver vara och vad som är poängen med undervisningen. Pimm citerar i det här fallet Thom (1973) som menar att

> … the construction of meaning rather than the question of rigor is the central problem facing mathematics education. (s. 7)

Språkets roll vid undervisningen framgår också tydligt av min egen forskning. Vid mina klassrumsobservationer av matematikundervisning visade det sig att ingen av de studerade lärarna behärskade ett klart informellt språk som kunde användas vid konkretisering av undervisningen. Ingen av dem förmådde heller gå mellan ett informellt och ett formellt matematiskt språk t.ex. i avsikt att förklara en formel (se bl.a. Löwing, 2000, 2001). Konsekvenserna av detta blir att elevernas erfarenheter av ett laborativt arbete, eller en vardagsanknytning av stoffet, inte låter sig transformeras till en mer formell eller abstrakt kunskap. Eleverna tvingas därför att manipulera med laborativa material istället för att använda materialet som ett led i att utveckla avsedda begrepp. Mot denna bakgrund blir det viktigt att en ämnesdidaktisk teori även omfattar användningen av språket och hur det kan byggas upp och förädlas under olika skeden av utbildningen. Eftersom tanken med ett laborativt arbete är att kommunicera (och lyfta fram poängerna med) en idé, så blir valet av material och metod helt beroende av vad som skall kommuniceras. Detta innebär att det är i den ämnesdidaktiska teorin man finner motivet för att laborera. Det är också där man finner den kunskapsstruktur som skall konkretiseras, alltså lyftas fram med hjälp av ett lämpligt språk och lämpligt material.

Ett annat språkligt dilemma som blir tydligt i samband med matematikundervisning av invandrare är uppfattningen att matematiken är ett internationellt språk. För en matematiker är visserligen det stringenta matematiska språket internationellt och på den nivån är det lätt att kommunicera över språk- och kulturgränser. Med skolmatematiken är det annorlunda:

> Grundskolan har till uppgift att hos eleven utveckla sådana kunskaper i matematik som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att kunna tolka och använda det ökande flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället. Utbildningen skall ge en god grund för studier i andra ämnen, fortsatt utbildning och ett livslångt lärande. (Skolverket, 2000a s. 26)

Med den här typen av mål blir skolmatematiken i hög grad beroende av det språk och den kultur som finns i skolan. Löwing (2000) ger exempel på detta i samband med intervjuer av invandrade lärare. Det är också intressant att jämföra de handböcker i didaktik och ämnesdidaktisk teori som Kilborn (1999, 2002) skrivit i bl.a. Sydafrika och i Moçambique. Han visar där att det inte bara är språken i sig (engelska, afrikaans och portugisiska) som är olika utan framför allt att talens namn är uppbyggda på olika sätt (inte minst på de lokala bantuspråken), att det är stora skillnader i utseende och behandling av algoritmerna, att man utrycker bråk- och decimaltal på olika sätt etc. Inget av detta ryms eller tas hänsyn till i en traditionell, akademisk ämnesteori.

I boken *Knowing and Teaching Elementary Mathematics* jämför Ma (1999) kinesiska och amerikanska lärares uppfattning om och kunskaper i skolmatematik. Vad hon speciellt lyfter fram i boken är att de kinesiska lärarna, trots en betydligt kortare och mindre formell utbildning i matematik, är överlägsna de amerikanska lärarna vad gäller att genomskåda och förklara hur man löser olika uppgifter. En kinesisk lärare har i allmänhet inte gått på någon ”high school” utan har endast fått två eller tre års lärarutbildning efter skolår 9. Hur kan de då mäta sig med amerikanska lärare som oftast har en ”bachelors’ degree”? Hennes svar är att det inte är tillräckigt att behärska akademikerns matematikteori. Läraren måste behärska mer än så:

> As we saw in the previous chapter, a teacher’s subject matter knowledge of school mathematics is a product of the interaction between mathematical competence and concern about teaching and learning mathematics. The quality of the interaction depends on the quality of each component. (s. 146)

Hon vänder sig också mot uppfattningen att den grundläggande skolmatematiken skulle vara enkel och självklar:

> Elementary mathematics is not superficial at all, and any one who teaches it has to study it hard in order to understand it in all comprehensive ways. (s. 146)

Det här är viktigt att notera, inte minst med tanke på den i Sverige spridda uppfattningen att den som behärskar akademikerns matematik automatiskt blir en bara lärare. Enligt den uppfattningen skulle det räcka med att behärska de algebraiska strukturer skolans matematik bygger på och att sedan kombinera detta med en allmändidaktik (alltså hur man väljer arbetsform och arbetssätt) för att bli en bra lärare. Vi delar inte den uppfattningen. Efter att i flera år ha studerat och undervisat om den grundläggande matematikinlärningen håller vi helt med Ma.

Ma hänvisar i detta resonemang till en av sina tidigare tutors, Lee Shulman:

> For example my elementary school teacher's knowledge of the two models of division may not be common among high school or college teachers. This kind of knowledge of school mathematics may contribute significantly to what Shulman (1986) called pedagogical content knowledge – "the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others" (p. 9) (s. xx)

I artrikeln *Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Matematics,* ger Ball och Bass (2000) uttryck för en liknade uppfattning. De ställer först följande fråga, som de därefter besvarar med hänvisning till Dewey:

> On the one hand, to what extent does teaching – and hence learning to teach – depend on the development of knowledge of the subject matter? On the other, to what extent does it rely on the development of pedagogical method? (s. 85)
>
> Subject matter he believed, was the embodiment of the mind, the product of human curiosity, and the search for truth. Teachers who were accustomed to wiew subject matter from the perspective of its growth and development would be prepared to notice nascent intellectual acitvity in learners. Such individuals would know subject matter in ways that prepared them to hear and extend students' thinking. To do this, he argued, teachers would need to be able to study subject matter in ways that took it back to its "psychial roots" (p. 162). (s. 85).

Bass & Ball menar således att läraren behöver kunna mycket mer än just den "rena" ämnesteorin för vad han/hon undervisar om. Detta kan tolkas så att det inte räcker med att servera eleven (eller den lärarstuderande) en färdig matematisk ämnesteori inramat av ett didaktiskt ramverk. Det krävs så mycket mer:

> … most people assume that what the teachers need to know is what they teach. Many would also add to the list, arguing that teachers must know more in order to have a broad perspective on where the students are heading. Nothing is inherently wrong with this perspective. However, to assume that this suffices is to assume that the enactment of the curriculum relies on no other mathematical understanding or perspective.
>
> Furthermore the use of mathematical knowledge in teaching is often taken for granted. The mathematical problems teacher confront in their daily work … are left unexplored, the occasions that require mathematical sensitivity and insight unprobed. Hence the content and nature of the mathematical knowledge needed in practice is unsufficiently understood. Moreover, the role played by such knowledge is also left unexamined. (s. 86, 87)

Vad man förespråkar är således en ämnesteori för lärare som inte bara tar hänsyn till den matematiska strukturen i det som skall läras utan att denna måste vävas samman med inlärningspsykologi, alltså hur det går till när en elev konstruerar kunskapen ifråga. Det är f.ö. detta som är den stora skillnaden mellan elevperspektivet och lärarperspektivet. Eleven är oftast nöjd om han/hon lyckas lösa en uppgift på ett för läraren acceptabelt sätt. För läraren bör fokus istället vara att kunna uppfatta olika elevers strategier och tankegångar och utifrån elevernas olika förutsättningar optimera deras möjligheter till inlärning. Detta kan ske på en rad olika sätt. I dagens skola gäller det dessutom att som lärare behärska ämnesteorin på ett sådant sätt att man förstår sådana strategier och metoder som elever för med sig från andra kulturer och att kunna kommunicera med invandrade elever på deras villkor. Även detta bör inrymmas i en ämnesdidaktisk teori.

En vanlig åsikt om lärarutbildningen är att om bara den lärarstuderande själv är duktig i matematik och i pedagogik, så kommer den nyss beskrivna lärarkunskapen med tiden, då man blivit mer erfaren som lärare. Ball och Bass avfärdar den myten:

> The overarching problem across these many examples is that the prevalent conceptualization and organization of teachers' learning tend to splinter practice and leave to individual teachers the challenge of intergrating subject matter knowledge and pedagogy in the contexts of their work. We assume that the integration required to teach is simple and happens in course of the experience. In fact, however, this does not happen easily, and often not happens at all. (s.86)

Enligt Ball & Bass krävs istället en teori som hjälper läraren att ta itu med följande problem:

> Teachers also need to puzzle about the mathematics in a student's idea, analyze a textbook presentation, consider the relative value of two different representations in the face of a particular mathematical issue. To do this, we argue, requires a kind of mathematical understanding that is pedagogically useful and ready, not bundled in advance with other considerations of students or learning or pedagogy. (s. 88)

Liksom Schulman (1986) kallar Ball och Bass detta för pedagogical content knowledge och beskriver det så här:

> Pedagogical content knowledge is a special form of knowledge that bundles knowledge with knowledge of learners, learning and pedagogy. These bundles offer a crusial recourse for teaching mathematics, for they can help the teacher anticipate what students have trouble learning, and have ready alternative models or explanations to mediate those difficulties. (s. 88).
>
> A second problem concerns *how* subject matter must be understood in order to be usable in teaching. We need to probe not just *what* teachers need to know, but to learn also how that knowledge need to be held and used in course of teaching, (s. 97)

För att kunna undervisa i ett ämne är det givetvis viktigt att man behärskar ämnet ifråga. Hur skall man annars kunna undervisa i det? Än viktigare är det emellertid att man behärskar ämnet på ett sådant sätt att man kan kommunicera det med barn och ungdomar och utgående från deras aktuella förkunskaper. Om ämneskunskapen enbart består av en akademikers matematikkunskap så får läraren stora problem med att tranformera sina kunskaper till ett elevtänkande. Läraren behöver därför en annan teori som stöd i sin yrkesutövning. Om detta behov av ämnesteori skriver Ma (1999):

> As Ed Begle recounts in *Critical Variables in Mathematics Education*, earlier studies often measured elementary and secondary school teachers' knowledge by the number and type of mathematics courses taken or degrees obtained - and found little correlation between these measures of teacher knowledge and various measures of student learning.
>
> Since the late 1980s, researchers have been concerned with teachers' mathematical subject matter knowledge for teaching (Ball 1988b) ”the knowledge that a teacher needs to have or uses in the course of teaching a particular school level curriculum in mathematics”, rather than ”the knowledge of advanced topics that a matematician might have” (Leinhardt et al., 1991, p. 88). (s. xx, xxi)

Vad som också förbryllar Ma är att man, trots alla undersökningar om bristande ämneskunskaper bland amerikanska lärare, inte ger dem något stöd vad gäller att förbättra dessa kunskaper.

> Studies of teacher knowledge abound in examples of insufficient subject matter knowledge in mathematics (Ball 1988a; Cohen, 1991; Leinhardt & Smith, 1985; Putman, 1992; Simon, 1993), but give few examples of the knowledge teachers need to support their teaching, particualary the kind of teaching demanded by recent reforms in mathematics education. (s. xxii)

Det senaste gäller i lika hög grad svenska lärare. Trots att svenska elevers resultat på nationella prov i matematik blivit allt sämre år från år, (Skolverket 2000b, 2001) verkar man inte kartlägga och på djupet analysera orsakerna till detta eller att inom lärarutbildning eller fortbildning bygga upp nya, bättre utvecklade lärarkunskaper. Uppmärksamheten har istället fokuserats på den typ av problem som man finner hos dem som studerar en mer avancerad matematik på universitetsnivå. Vi menar, på samma sätt som Ma, Ball och Bass m.fl. att detta handlar om två helt olika kunskapsområden, akademisk ämnesteori respektive ämnesdidaktisk teori.

Mot bakgrund av den litteratur som här presenterats kan vi konstatera att den debatt om ämnesdidaktik och ämnesdidaktisk teori i matematik, som kom av sig i Sverige efter böckerna *Fackdidaktik I - III,* i slutet av 1980-talet, nu förs i USA. Debatten har t.o.m. intensifierats utgående från böckerna *The Teaching Gap* (Stigler & Hiebert, 1999), *Knowing and Teaching Elementary Mathemetics* (Ma, 1999) och *Adding it up* (Kilpatrick m fl 2001). För närvarande satsas det i Sverige en hel del pengar på skolämnet matematik. Det skulle inte vara helt fel om en del av dessa pengar satsades på att utveckla den ämnesdidaktiska teorin.

7. Olika försök att närma sig en ämnesdidaktisk teori

Av de tidigare kapitlen framgår att akademikerns ämnesteorin i matematik inte fungerar som skolämnesteori. Det framgår också att man i Sverige (och USA), trots en omfattande matematikdidaktisk forskning världen över, får allt större problem med undervisningen i skolämnet matematik. En viktig orsak till detta kan vara att det saknas en ämnesdidaktisk teori, en teori som kan bilda utgångspunkt för didaktikens viktiga vad- och hur-frågor. I det här kapitlet ges konkreta exempel på hur arbetet med att utveckla en ämnesdidaktisk teori kan gå till och hur olika dilemman i matematikundervisningen kan redas ut och förklaras med hjälp av en sådan teori. Observera att målet med den här teorin är att ge lärare en karta som beskriver hur matematikämnets innehåll kan uppfattas, struktureras och kommuniceras utgående från individuella behov och förutsättningar.

De aspekter som kommer att utredas och konkretiseras är:

- Hur man kan hämta idéer från tidigare forskning och hur resultaten av den forskningen efter hand kan revideras och aktualiseras. Den viktigaste lärdomen från avsnitt 7.1 är att undervisningens mål kan läggas på olika kognitiva nivåer, att den kan kopplas till den lärandes mognad och erfarenhet samt att man på varje sådan nivå kan skapa sig en fungerande (om än preliminär) matematisk modell för att tolka omvärlden.
- De definitioner och begrepp som används av en matematiker fungerar sällan i skolans värld eftersom de förutsätter ett abstrakt tänkande och en hel del (tyst) kunskap. De blir därför i många fall svåra att uppfatta för grundskolans lärare och hjälper inte lärare att relatera kunskapen till individ och omvärld. Sättet att beskriva definitioner och begrepp rimmar också dåligt med elevers förmåga att uppfatta motsvarande begrepp. För att överbrygga detta problem krävs en teori som hjälper lärare att strukturera matematiska begrepp i avsikt att kommunicera dem med barn och ungdomar. Detta behandlas i avsnitt 7.2. Här ges också några aktuella exempel på vad teorilöshet kan leda till.
- Mycket av det som sker i skolans matematikundervisning tas för givet. Man tänker inte alltid på att den kommunikation som sker i skolan bygger på en speciell kultur och en speciell användning av språket. I avsnitt 7.3 ges exempel på vikten av att en ämnesdidaktisk teori uppmärksammar språkets och kulturens roll. Detta gäller inte minst det språk och det material man använder för att konkretisera undervisningen. Språket i vid mening är också ett viktigt instrument när det gäller att individualisera undervisningen.

- I avsnitt 7.4 behandlas användningen av laborativa material och metaforer i undervisningen. De exempel som ges visar att valet av konkretiseringsmodell eller metafor kan vara avgörande för om elever förmår uppfatta ett begrepp eller en strategi. Detta kan sin tur vara avgörande för individens möjligheter att utveckla ett tänkande från en konkret till en abstrakt nivå. Det är också så att en del elever inte kommer längre än till den konkretiserande modellen eller metaforen i sin uppfattning av ett begrepp. Av det skälet måste även denna typ av kommunikation behandlas i en ämnesdidaktisk teori för att ge lärare valmöjligheter när det gäller de didaktiska vad- och hur-frågorna.

7.1 Att undervisa i geometri på olika kognitiva nivåer

Om man med konkretisering menar att språkligt och begreppsmässigt underlätta förståelsen av en matematisk struktur, så borde all matematikundervisning starta på en konkret nivå för att efter hand fördjupas och vid behov bli mer abstrakt. Istället för att bygga upp isolerade öar av kunskaper, vissa konkreta och andra abstrakta och ofta utan inbördes koppling, så borde skolans matematikundervisning planeras som ett kontinuum från konkret till abstrakt. Eftersom alla områden inom den grundläggande matematiken kan behandlas på någon konkretiseringsnivå, så måste en ämnesdidaktisk teori beskriva de möjligheter som erbjuds att kommunicera det innehållet. Teorin måste med andra ord ge det nödvändiga underlag som krävs för didaktikens val av vad och hur. Med en god teori i botten behöver ingen elev "bli avhängd" på grund av att han eller hon inte kan tillgodogöra sig kommunikationen i klassrummet t.ex. på grund av bristande förkunskaper eller abstraktionsförmåga. (Se t.ex Kilborns och Löwings artiklar i Nämnaren 2-3, 1986/87, Kilborn & Löwing, 2000 och Löwing & Kilborn, 2002 kapitel 4)

7.1.1 van Hieles syn på geometriundervisningen

En av dem som försökt ge en struktur åt geometriundervisningen är van Hiele (1986). Han menade att undervisningen, dels måste bedrivas på ett språk som eleverna förstår, dels måste anpassas till elevernas aktuella förmåga att tillgodogöra sig ett innehåll.

> I cannot begin with a definition of *structure*. A definition of a concept is only possible if one already knows, to some extent, the thing that is to be defined. In this case there is a very great chance that the idea you have of a structure is quite different from the concept I want to develope. (s. 9)

Observera att van Hiele skiljer mellan *structure* och *concept*. Att känna till Euklides axiomsystem eller strukturen hos avbidningsgeometrin bidrar väldigt lite till begreppen inom geometrin i meningen vad som är karakteristiskt för, eller vilken innebörd man finner i, t.ex. vardagens geometri eller yrkesgeometri. Vi kan jämföra detta med begreppet multiplikation där den vanligaste definitionen inte talar om hur man utför multiplikationen eller vad det innebär att multiplicera i olika tillämpade situationer (se vidare 7.2).

Observera också hur van Hiele poängterar svårigheterna att förstå ett begrepp eller en definition om man inte redan har en uppfattning (förförståelse) om det som skall förstås. Vi känner igen detta från Marton och Booth (2000)

> Ur vår synvinkel går lärande i regel från en odifferentierad och mindre sammanhängande förståelse av helheten, till en ökad differentiering och integration av helheten och dess beståndsdelar … För att uttrycka det mycket enkelt: för att lära sig någonting måste man ha en aning om vad det är man lär sig. (s. 10)

Ma (1999) är inne på samma linje och hänvisar därvid till Bruners ”structure of the subject”:

> Bruner said, ”Grasping the structure of a subject is understanding it in a way that permits many other things to be related to it meaningfully. To learn structure, in short, is to learn how things are related”… (p.7)

Van Hiele lyfter också fram språkets betydelse när eleverna skall tillägna sig nya begrepp.

> An important medium in which you find structure is language. Language is very important to thinking. Without language, thinking is impossible, without language, there is no development of science. (s. 9)

Eftersom många begrepp eller termerna för dessa begrepp (såsom linje, kurva, inskriven, area, yta, volym,…) ofta skiljer sig från vad man menar i vardagslivet, så måste betydelsen inom skolmatematiken göras språkligt klar och entydig. I annat fall tolkar eleverna undervisningen på ett felaktigt sätt vilket hindrar dem från att se viktiga strukturer.

Vad van Hielen menar med struktur vilar i hög grad på gestaltpsykologin:

> In Gestalt psychology you might find the following statement: We are sure of insight when the person (or animal) you are studying comes to a conclusion on account of a mental structure.” In my dissertation, ”Begrip en Insicht”, (*Conception and Insight*), of 1957, I wrote: ”Insight exists when a person acts in a new situation adequately and with intention.” (s. 24)

Som exempel på detta kan vi ta rektangelns area. Att förstå innebörden av rektangels area innebär inte bara att kunna räkna ut arean av en godtycklig rektangel genom att multiplicera basen med höjden. Förståelse bör även innebära att man förmår bygga vidare på det aktuella begreppet för att t.ex. förstå hur man bestämmer arean av en parallellogram eller volymen av ett rätblock. I annat fall blir kunskapen statisk (ofta procedurell) och utgör ett hinder mot att utveckla och förfina ett matematiskt vetande.

Van Hiele utgår också från gestaltpsykologin när ger syn på hur man kan bygga upp en undervisning om geometri:

> In structural psychlogy (Gestalt Psychology) there are four important properties that govern structure:
> 1. It is possible to extend a structure. …
> 2. A structure may be seen as a part of a finer structure. …
> 3. A structure may be seen as a part of a more-inclusive structure. …
> 4. A given structure may be isomorphic with another structure. … (s. 28)

Om man tar de här fyra egenskaperna som utgångspunkt för att ge en struktur åt geometriundervisningen så finner man

- dels att det är viktigt att de preliminära strukturer man hjälper eleverna att bygga upp under de första skolåren måste vara såväl konsistenta och påbyggbara som rimma med (inte stå i något motsatsförhållande till) de mer formella strukturer som eleverna möter senare i sin utbildning.
- dels att man, genom att utnyttja isomorfi (alltså strukturlikhet) såväl kan knyta samman olika delar av matematiken som utnyttja möjligheten att använda metaforer. Inom geometrin ger t.ex. den analytiska geometrin möjligheter att lösa vissa geometriska problem algebraiskt.

Detta rimmar väl med det tidigare redovisade citatet från Bruner: "To learn a structure, in short, is to learn how things are related." Detta gör man alltså, enligt van Hiele med hjälp av språket: "An important medium in which you find structure…without language, thinking is impossible".

När det gäller att ge struktur åt ett fenomen förbiser van Hiele en viktig faktor nämligen kontextens betydelse. Ett begrepp som inte kan knytas till en lämplig (eller avsedd) kontext kan helt tappa sin innebörd och kan då bara uppfattas på en ytnivå. Detta är mycket vanligt inom matematikundervisningen, speciellt på gymnasiestadiet. Säljö (2000) ger ett utmärkt exempel på vad brist på kontext kan innebära och det är inte svårt att se kopplingen till matematikundervisning:

> Betydelsen finns inte enbart i själva texten utan är beroende av en bakgrundskunskap och kännedom om det sammanhang i viket budskapet producerats. Vad betyder exempelvis Jesu ord ”Jag är vägen, sanningen och livet” eller studieförbundet Vuxenskolans fyndiga slogan ”Vill du framåt, gå i cirkel!”? För att förstå bibelcitatet måste vi ha en viss insikt i hur liknelser och metaforer fungerar i religiösa sammanhang … För att förstå vad Vuxenskolans reklam syftar på, måste vi känna till ganska mycket om folkbildning och dess pedagogiska traditioner. (s. 15)

Observera att valet av kontext kan vara avgörande för möjligheterna att finna de goda metaforer som leder elevernas tänkande i avsedd riktning och därmed möjliggör en förståelse.

7.1.2 Van Hieles nivåer

Mot den bakgrund som just beskrivits bygger van Hiele upp en modell omfattande fem nivåer för hur man kan uppfatta och därmed tillägna sig kunskaper i matematik:

First level: the visual level
Second level: the descriptive level
Third level: the theoretical level; with logical relations, geometry generated according to Euclid
Fourth level: formal logic; a study of laws and logic
Fifth level: the nature of logic laws. (s. 53)

(För den som vill ha en mer ingående beskrivning av de fem nivåerna, finns det en bra översättning i Hedrén (1992)).

Dessa s.k. van Hiele-nivåer har ofta används som exempel på hur man kan individualisera geometriundervisningen. Den underliggande tanken är att ett geometriskt problem kan beskrivas, uppfattas, och lösas på olika komplexitetsnivå och att elever, efter hand som de behärskar en nivå kan byta upp sig till, och arbeta på, en högre och mer formell nivå. Ett problem med dessa van Hiele-nivåer är emellertid att de utgår från en äldre syn på geometrin, med sina rötter i Euklides *Elementa*. Det betyder att man redan på den tredje nivån har passerat de formella krav på geometrikunskaper som ställs i dagens grundskola. Om denna begränsning skriver van Hiele själv:

> The above classifications is suitable to a structure of mathematics and perhaps mathematicians will be able to work with it. (s. 53)

Van Hiele påpekar därefter att det egentliga syftet med hans arbete var att förbättra elevernas tänkande, alltså att finna en väg för hur man går mellan dessa nivåer. Van Hiele lämnar därmed ämnesteorin och går över till att beskriva hur man didaktiskt kan hjälpa eleverna att gå från en nivå till en annan.

> In the learning process leading to a higher level you can discern five stages.
> 1. In the first stage, that of *information*, pupils get aquainted with the working domain.
> 2. In the second stage, that of *guided orientation*, they are guided by tasks (given by the teacher, or made by themselves) with different relations to network that has to be formed.
> 3. In the third stage, that of *explication*, they become consious of the relations, they try to express them in words, they learn the technical language accompanying the subject matter.
> 4. In the fourth stage, that of *free orientation*, they learn by general tasks to find their own way in the network of relations.
> 5. In the fifth stage, that of *integration*, they build an overview of all they have learned of the subject, of the newly formed network of relations now at their disposal. (s. 53, 54)

Den här delen av van Hieles arbete är problematiskt. Det är svårt att se hur de här stegen kan vara adekvata för att hjälpa eleverna vid <u>alla</u> byten av nivåer. Dessutom utgår beskrivningen från en didaktisk grundsyn som begränsar dess användbarhet. Observera dessuitom att de här stegen inte beskriver ett ämnesinnehåll utan sådana arbetssätt och arbetsformer som van Hiele anser vara lämpliga vid undervisning i matematik. Till skillnad från ämnesteorin är den här typen av ämnesdidaktik snarast en "färskvara" som varierar med den för dagen gällande didaktisk/pedagogiska trenden.

För att förklara sig närmare ger van Hiele ett konkret exempel på hur man kan tillämpa de fem stegen och han utgår då från romben:

> For example, consider the stages in the study of the rhombus.
>
> 1. First stage: A certain figure is demonstrated, it is called ”rhombus.” The pupils are shown other geometrical figures and are asked if they also are rhombuses.
> 2. Second stage: The rhombus is folded on its axes of symmetry. Something is noticed about the diagonals and the angles.
> 3. Third stage: The pupils exchange their ideas about the properties of a rhombus.
> 4. Fourth stage: Some vertices and sides of a rhombus are given by position. The whole rhombus has to be constructed.
> 5. Fifth stage: The properties of a rhombus are summed up and memorized. (s. 54)

Direkt efter det att van Hiele gett detta exempel skriver han att detta står för en gammaldags syn på geometri. Han modifierar därför exemplet så att det anpassas till tranformationsgeometrin (alltså till den geometri som bl.a. bygger på symmetri, speglingar och vridningar), en modell för geometri som aldrig slog igenom här i Sverige. Eftersom (den för dagen aktuella) synen på geometri i svenska skola snarast är av den ”gammaldags” typen, nöjer jag mig med att analysera de ovan beskrivna fem stegen.

7.1.3 En analys av van Hiele-nivåerna

Van Hieles ”nivåer” och ”steg” är intressanta eftersom de ger en modell för hur elever successivt kan bygga upp sina kunskaper om geometri. I sina nivåer ger han en modell för hur man kan skapa en ämnesdidaktisk teori som utgör en brygga mellan vardagens uppfattning om geometri och vetenskapens. I sina steg visar han samtidigt hur man, sedan man ur nivåerna valt *vad* man skall undervisa om, kan härleda *hur* detta kan gå till. Här kommer alltså ämnesdidaktiken in. Samtidigt som vi ser hans arbete som ett (tidigt och) viktigt bidrag till den ämnesdidaktiska teorin så finner vi också vissa problem med det. Vi uppfattar det t.ex. så att rombens egenskaper diskuteras först i det tredje steget och att en definition av romben sker först i det femte steget. En kommunikation om rombens egenskaper, dvs. en användning av språket förekommer först i det tredje steget. På den här punkten har Zepp (1989) en annan och klarare syn när han beskriver språkets relation till begreppen. Han beskriver detta på följande sätt med hänvisning till Bruner:

> Jerome Bruner (1973) argues that language is especially important in labelling these higher order concepts, since it facilitates the transfer from one category into another. …it is the role of the teacher to foster the use of higher order conceptual words,

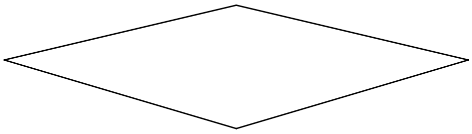
according to Bruner, in order to develop the ability to transfer from one classification scheme to another. (s.53)

Zepp (och Bruner) menar att språk och begrepp från början bör utvecklas hand i hand, från enkla konkreta begrepp som beskrivs med sitt språk (ett vardagsspråk) till mer formellt förankrade begrepp som beskrivs med sitt (mer precisa) språk. När eleverna successivt utvecklar sin begreppsvärld måste de ha ett adekvat språk för varje sådan begreppsnivå. Om en elev inte behärskar det språk på vilket en viss begreppsnivå beskrivs så kan begreppet ifråga inte kommuniceras och därmed inte uppfattas och utvecklas av eleven. Här finner vi sannolikt en av orsakerna till att så många elever får problem med matematik när de kommer till högstadiet. Där möter de ofta lärare som har en annan utbildning än de lärare de mött tidigare och som använder ett annat, mer formellt språk än de är vana vid.

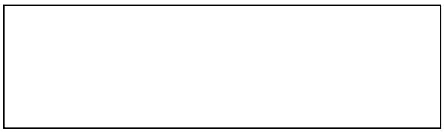
Ett stort problem uppstår, enligt vår uppfattning, redan i samband med steg numer 1. Enligt van Hiele skall man här visa ett antal figurer som kallas för romber och eleverna skall sedan avgöra om ett antal andra figurer är romber eller ej. Vi förstår inte hur detta kan vara möjligt om eleverna inte har fått någon form av (preliminär) definition av vad en romb är. Enligt vilket kriterium kan de annars skilja romben från andra parallellogrammer eller avgöra att kvadraten är en romb? Uppenbarligen är avsikten att skapa variation, men det är ännu viktigare att kunna avgöra vad som skall varieras och vad man avser skall uppfattas i variationen.

Även om van Hiele använder ordet ”network” i det fjärde och femte steget, så verkar det inte som om han ser romben och dess egenskaper i relation till ett större nätverk av kunskaper och det är på den punkten vi ser den största svagheten med van Hieles nivåer. För att förstå begreppet romb måste en elev enligt vår uppfattning ha en rad andra kunskaper (uppfatta andra begrepp) som kan utnyttjas för att bygga upp begreppet romb. Om man som i steg 1 skall jämföra romben med ett antal andra figurer så måste väl dessa andra figurer, på någon nivå redan vara kända (identifierbara)? För att kunna analysera symmetriegenskaperna i steg 2 krävs därför att eleverna redan behärskar begreppet symmetri. För att i steg 3 kunna utbyta tankar om rombens egenskaper måste eleverna redan behärska en rad andra termer och begrepp osv. Det är enligt vår uppfattning relationerna mellan alla dessa begrepp, och likheter och skillnader i struktur, som utgör en viktig bakgrund för att bygga upp kunskaper om en romb eller för att bygga upp en ämnesdidaktisk teori för geometri. Sammanfattningsvis så är van Hieles begrepp romb i sig ett mycket fattigt begrepp. Det är först när man byggt upp ett kluster av begrepp, till vilka begreppet romb är relaterad på olika sätt, som man på allvar börjar få en uppfattning om vidden av begreppet romb.

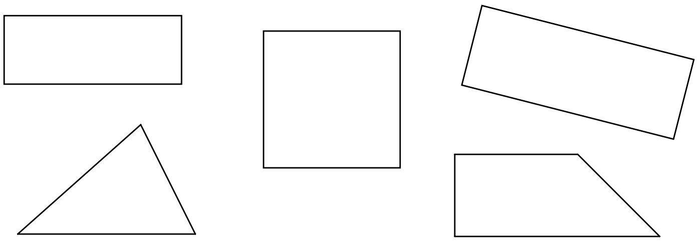
Jag ger nu ett alternativt förslag till hur man kan strukturera undervisningen i geometri, och då med romben som konkret underlag. Innan dess är det emellertid viktigt att närmare diskutera vad som menas med en kvadrat och en romb. De definitioner och begrepp som gäller inom geometrin är nämligen inte alltid helt klara för alla lärare och elever. Ett exempel på detta är kvadraten som samtidigt är en romb och en rektangel. Detta kan verka konstigt med tanke på att en romb kan se ut så här:



och en rektangel så här.



En vanlig fråga i läromedel och i test är också att utreda vilka av följande figurer som är rektanglar:

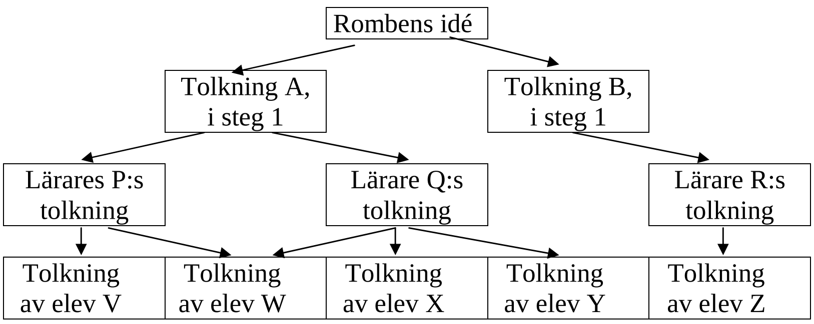


Många elever tar i det här fallet inte med kvadraten. Man kan fråga sig varför. Ett enkelt svar på frågan är att kvadraten ur elevens synvinkel är så mycket mer än bara en rektangel. Ännu mer märklig blir frågan om man ber eleverna tala om vilka av figurerna som är trianglar, kvadrater och rektanglar. Har man redan preciserat att en av figurerna är kvadrat, varför då också kalla den för rektangel, ett begrepp som har lägre precision? Ett analogt exempel skulle vara att ett barn, som på ett foto skall peka ut sina släktingar, inte skulle peka ut sin syster som en släkting. Systern är ju så mycket mer än en släkting. Van Hiele tar själv upp det här problemet och kommenterar det på följande sätt:

> The conclusion ”Every square is a rhombus” is not a result of maturation, it is the result of a learning process. An intelligent person need not conclude that every square is rhombus; this is just a submission to a traditional choice. In some Greek philosophies, a square could not be a rhombus, for it had some properties a rhombus could not have. (s. 50)

Resonemangen ovan väcker frågan om vad man egentligen menar med ett begrepp. Ofta är det väl så att man i skolan blandar samman begrepp och definitioner. Detta leder i sin tur till att elever har svårt att få grepp om begreppen samtidigt som läraren får problem med att sekvensera inlärningen. I avsnitt 7.1.4 ges ett förslag till en modell för sekvensering vid arbete med romben.

Det här är kanske inte rätt plats att föra en diskussion om begrepp och uppfattning av begrepp. I flera artiklar och rapporter verkar man emellertid blanda samman de här sakerna. Om man emellertid utgår från att begreppet romb finns i en idévärld, så är givetvis alla de beskrivningar vi möter av begreppet romb inget annat än tolkningar av begreppet ifråga. Beroende på vem som tolkat begreppet i ett första steg kan det vara mer eller mindre rimligt (eller möjligt) för en lärare eller läromedelsförfattare att (utgående från sin uppfattning och språkliga kompetens) göra sin omtolkning och beskrivning av begreppet i andra hand.



Vad den här figuren avser att visa är att en från början överteoretiserad tolkning (beskrivning) av ett begrepp i nästa steg ger problem för läraren (lärarutbildaren) när det gäller att uppfatta begreppet ifråga. Ännu större problem uppstår när läraren i sin tur skall uttolka och konkretisera begreppet i fråga för att det skall kunna uppfattas av skolans elever. Sett ur mottagarens synvinkel är det således viktigare att ett begrepp beskrivs på en för individen uppfattbar (om än preliminär) nivå än på en matematiskt korrekt men för individen obegriplig nivå. Det är väl detta Marton & Booth (2000) har i åtanke när de skriver att "vid närmare eftertanke … visar sig dessa helheter, den lärandes ursprungliga idéer, vara ofullständiga snarare än felaktiga"

Den beskrivning av begreppet eleven slutligen får och elevens möjligheter att uppfatta begreppet på ett relevant sätt, är alltså beroende av hur språk och termer använts i flera tidigare led. Ett sätt att undvika alltför stora missuppfattningar är därför att i en ämnesdidaktisk teori beskriva begrepp på ett sådant sätt att begreppen är uppfattbara på flera olika nivåer och utgående från olika förförståelser. Det är i själva verket denna insikt som van Hiele har bidragit med att ge.

7.1.4 Ett sätt att strukturera undervisningen om romben?

När man bygger upp en ämnesdidaktisk teori så kan man (vilket detta är ett exempel på) utgå från tidigare forskning som bearbetas med hänsyn tagen till nya rön och idéer. En hake i van Hieles exempel är att man inte kan börja arbeta med ett objekt såsom romben utgående från ett vacuum.

> Varje människa måste lära sig allt från nollpunkten. Hon kommer inte till världen med släktens samlade kunskap. … Hon måste steg för steg inhämta allt det hon kan behöva och önska sig av kunskaper. (Liedman, 2001 s. 23)

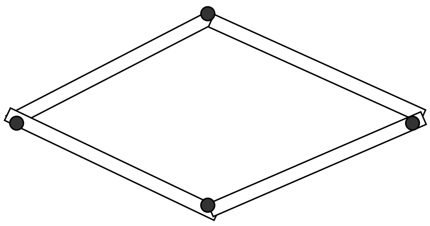
Det är inte meningsfullt att definiera något utan att ge definitionen någon bakgrund, t.ex. en konkret förankring. Det är inte heller meningsfullt att införa en symbol eller ett namn för ett begrepp innan man har en uppfattning av begreppets innebörd. Bruner (1960/77) uttrycker detta så här:

> It is immeasurabely valuable, in learning a code, to know already what the code stands for. (p 29)

Även Marton & Booth (2000) tar upp detta dilemma som de refererar till som Menons paradox.

För att eleverna skall kunna uppfatta begreppet romb, krävs det alltså att de har vissa förkunskaper. Man kan t.ex. se till att eleverna i förväg har en uppfattning om begrepp som fyrhörning (en plan figur med fyra sidor) och triangel (en plan figur med tre sidor) samt att de känner till den speciella fyrhörning som kallas kvadrat och som definieras genom att den har fyra lika långa sidor och räta vinklar. Det här behöver inte göras speciellt krångligt. Sidorna kan mätas med en linjal eller jämföras med varandra och en rät vinkel kan definieras som (och jämföras med) den vinkel man får när man viker ett papper symmetriskt två gånger (ett fjärdedels varv).

Utgående från det kluster av begrepp (och termer) som eleven nu förväntas ha gäller det att ge en preliminär definition av begreppet romb som så nära som möjligt ansluter sig till den matematiska definitionen. Vi konstaterar att man i *Matematikterminologi i skolan* (Skolöverstyrelsen, 1979) ger definitionen: "En *romb* är en fyrhörning där alla sidor är lika långa.". *Nationalencyklopediens* definition: "Fyrhörning i planet med alla sidor lika långa" är bättre. (I den först nämnda definitionen kan ju fyrhörningen vara en tredimensionell kropp.) För ge en första uppfattning av vad en romb är kan man börja med att använda en mall bestående av fyra lika stora sträckor, sammanfogade med gångjärn eller påsklämmor. En första definition av en romb blir då att alla de plana figurer som kan bildas med hjälp av mallen ifråga kallas för romber.



Det är emellertid viktigt att man inte blandar samman denna (preliminära) definition av en romb med begreppet romb. Begreppet romb är så mycket mer och omfattar alla de egenskaper romben har – till skillnad från de egenskaper den inte har. Bruner (1960/77) uttrycker detta så här:

> Grasping the structure of a subject is understanding it in a way that permits many other things to be related to it meaningfully. To learn structure, in short, is to learn how things are related. (s. 7)

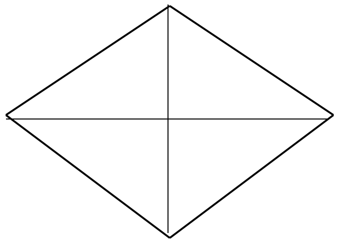
Ma (1999) betonar också vikten av att begrepp presenteras på ett för eleverna tydligt och meningsfullt sätt eftersom förståelsen och meningsfullheten påverkar elevernas attityder och inställningar till ämnet. Hon skriver:

> A well-developed conceptual understanding of a topic also includes understanding of another dimension of structure of the subject – attitudes toward mathematics. Again Bruner said, ”Mastery of fundamental ideas of a field involves not only the grasping of general principles, but the development of an attitude towards learning and inquiry, towards guessing and hunches, toward the possibility of solving problems on ones’s own". (p. 20) (s. 24)

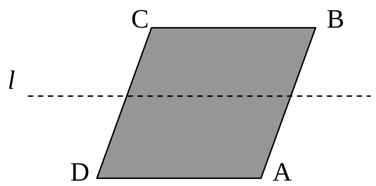
För att bygga vidare och vidga sin uppfattning av begreppet romb är det nu dags att laborera och diskutera utgående från definitionen, alltså att bilda olika figurer med hjälp av den givna mallen för att på så sätt skaffa sig nya kunskap om rombens egenskaper. Ju fler egenskaper man behärskar, dvs. ju mer utvecklad uppfattning av begreppet man har, desto finare blir romben som verktyg när det gäller att organisera och lösa problem i omvärlden – eller för att gå vidare till andra områden av geometrin.

En teoretisk modell skulle mot denna bakgrund kunna inledas med att de olika former som kan bilda med hjälp av "laborationsromben" undersöks och systematiseras. När den lärande blivit bekanta med alla möjliga former kan de övergå till att sortera de olika figurerna i romb och icke-romb. De kommer då själva att upptäcka att kvadraten också är en romb. Detta är inte konstigare är att Johans pappa är min make.

Man kan i ett nästa steg fortsätta laborerandet genom att klippa ut ett antal romber och undersöka dess symmetriegenskaper. Man upptäcker då att romben har (minst) två symmetriaxlar som man kan kalla för diagonaler. Genom att vika romben över båda symmetrilinjerna inser man att det alltid blir en rät vinkel mellan diagonalerna (symmetrilinjerna). Etc, etc.



Man kan också vika romben så här, utefter linjen *l* och på det sättet konstatera att sidorna AD och BC är parallella eftersom motsvarande linjer avbildas på varandra.



Eleverna kan således redan på det här stadiet konstatera att den definition som ges av Thompson (1991) är överbestämd:

romb En parallellogram, i vilken samtliga sidor är lika långa.(s. 373)

Att romben är en parallellogram behöver nämligen inte ingå i definitionen utan är en egenskap hos romben som följer av definitionen. Detta är samtidigt ett exempel på hur man kan upptäcka viktiga matematiska samband även med enkla metoder.

7.1.5 En sammanfattning

En ämnesdidaktisk teori är en teori avsedd för lärare med syftet att systematisera och förklara olika fenomen inom matematikundervisningen samt förutsäga nya. Det territorium som skall förklaras är innehållet i skolans undervisning och hur detta innehåll kan struktureras och kommuniceras. Det betyder att de fenomen som skall systematiseras, förklaras och förutsägas kommer från innehållet i undervisning och inlärning. En ämnesdidaktisk teori måste därför inte bara byggas upp utgående från, utan också kontinuerligt testas mot, erfarenheter av ämnesinnehållet i undervisning och inlärning. I annat fall tappar teorin sitt värde som teori. Liksom i de flesta andra teorier gäller det också att hela tiden samla in nya data och erfarenheter som kontinuerligt testas mot den aktuella teorin för att därefter inlemmas i teorin eller förkastas. Detta arbete kan t.ex. gå till på det sätt vi just beskrivits vid analysen av van Hieles idéer.

För att bygga upp en del av en ämnesdidaktisk teori gäller det först och främst att ha de långsiktiga målen för undervisningen klara för sig. Med detta som utgångspunkt och med hänsyn tagen till elevernas mognad och förmåga gäller det att bygga upp en dynamisk ämnesstruktur där hänsyn tas till att såväl mål, förkunskaper som intresse kan vara olika för olika utbildningar och elever. Det handlar således inte om att göra didaktiska val såsom van Hieles *information*, *guided orientation,* och *explication* utan om att bygga upp ett nätverk av begrepp och att ge dessa begrepp en struktur. Vår uppfattning är därvid att man för varje sådant begrepp måste utgå från någon form av definition. En definition behöver, som redan visats, varken vara svår eller obegriplig. Att en syster är en flicka med samma föräldrar som jag själv eller att en insekt är ett litet djur med sex ben (till skillnad från en spindel som har åtta ben) är inte så svårt att begripa? Att de här definitionerna är preliminära och ofullständiga betyder inte att de är felaktiga. Det handlar istället om vad elever i olika åldrar kan uppfatta och om definitionen fungerar för att tolka den för individen ifråga just nu aktuella aspekten av omvärlden.

Man måste också skilja mellan definition och begrepp. Enligt vår uppfattning bör eleverna, sedan de fått en (preliminär) definition av t.ex. en romb, börja med att konstruera (bygga upp och utveckla) sin egen uppfattning av begreppet romb. Detta kan emellertid inte ske i ett intellektuellt vakuum. Att bygga upp begreppet romb innebär istället att jämföra konsekvenserna av definitionen med andra tidigare uppfattade erfarenheter och begrepp. Det är oftast på det sättet man bygger upp sitt matematiska vetande och varför inte använda den tekniken redan från början. Det är väl för övrigt på det här sättet barn lär sig att uppfatta de flesta begrepp, genom att successivt erövra dem och jämföra dem med tidigare erövrade begrepp?

Tanken är att eleverna, genom att arbeta så här, efter hand skall bygga upp kluster av begrepp som är mer eller mindre sammanflätade med varandra. De kan t.ex. på egen hand upptäcka saker som att kvadraten är en romb, att romben är en parallellogram, att en romb kan delas upp (på två sätt) i två kongruenta (likadana) liksidiga trianglar etc. När man tar upp begrepp som mittpunktsnormal eller delning av en sträcka, får romben en ny, viktig betydelse. Efter hand som eleven erövrar nya kunskaper, t.ex. begreppet area, så kommer begreppet romb att utvidgas och innefatta även dess area. Andra intressanta frågor kan vara om det går att inskriva eller omskriva en cirkel. Om, och i så fall när, man kommer till den analytiska geometrin så är det dags att kombinera kunskaper om punkter och linjer i planet med begreppet romb. Man har nu fått ett nytt verktyg med vars hjälp man kan betrakta och analysera romben ur helt nya perspektiv.

När man som lärare hjälpt eleverna att utvidga ett begrepp till en viss nivå kan det vara dags att ompröva definitionen och delar av begreppsapparaten. Läraren ställs nu inför valet om den nuvarande definitionen är den bästa eller om man utgående från elevernas aktuella kunskaper kan ge en annan, bättre definition. Kan man t.ex. i fallet romben ge en ny definition utgående från symmetriegenskaperna, alltså från att romben har två vinkelräta diagonaler som är varandras mittpunktsnormaler eller från att rombens sidor består av hypotenusorna i fyra kongruenta rätvinkiga trianglar? För att man som lärare skall kunna fatta viktiga beslut om detta kräves en teori, en ämnesdidaktisk teori. Ett viktig inslag i denna teori är att hjälpa läraren att avgöra hur långt en preliminär definition håller och när, och på vilket sätt, det är lämpligt att omvärdera definitionen. Även om en teori av det här slaget systematiserar och förklarar enkla ting så är teorin långt ifrån enkel. Det är få lärare som har en sådan överblick över skolans matematik att de spontant och utan hjälp av en teori kan göra en konsekvent planering för sina elever omfattande 10 - 12 års matematikinlärning.

7.2 Matematikens definitioner och elevers uppfattning av motsvarande begrepp.

I Hög tid för matematik (NCM 2001) skriver man att

> Skolämnet matematik har framstått som färdigutvecklat, regelstyrt och stressande för läraren - problematiskt och tråkigt för eleverna", (s. 12)

Någon egentlig analys av orsakerna ges inte. I Thompson (1986) hittar man emellertid en förklaring:

> Den naturvetenskapliga undervisningens kris ligger delvis i att modern vetenskap brutits loss från de förutsättningar som styrde den grekiska vetenskapens utveckling. Modern naturvetenskap och matematik riskerar att i undervisningen stelna till en rigid symbolism. (s. 27)

Vad Thompsson skriver kan jämföras med vad Ekstig (2002) nämner om NO-undervisningen och det

> spänningsfält som finns mellan elevernas förhandsuppfattningar och naturvetenskapliga begrepp. Om undervisningen inte lyckas överbrygga detta spänningsfält på ett ur elevernas perspektiv tillfredsställande sätt, kommer denne elev att förlora tilltron till sin egen förmåga att lära naturvetenskap. (s. 149)

Den akademiska disciplinen matematik agerar således (liksom de naturvetenskapliga disciplinerna) på en abstraktionsnivå som är svårbegriplig för de flesta personer. De definitioner som ges och de begrepp som beskrivs kräver åtskilligt av förförståelse och preliminär kunskap för att kunna uppfattas. Denna matematik är inte tillgänglig för barn. Barn förväntas inte lära sig en färdig matematik via färdiga formler utan förväntas konstruera denna matematik successivt via sina erfarenhet av omvärlden. Kanes & Nisbeth (1996) tar upp detta i en artikel och refererar där till Schulman (1987).

> Shulman argues that typical **teacher-education** programmes focus too much attention on content knowledge at the expence of pedagogic content knowledge, and therefore they fail to equip beginning teachers adequately.

Vad man här efterlyser är en för lärarutbildningen relevant ämnesteori. Zepp (1989) uttrycker liknande åsikter ur sin synvinkel:

> In mathematics, hierarchies can become quite complex, piling up many levels of abstraction, and culminating in such notations as category theory, which groups together already highly abstract concepts such as groups, vector spaces, or topological spaces, into the higher order of abstarction of 'categories'. (s. 53)
>
> Teachers should also be aware of that real life concepts and mathematical concepts may be very different and that students may learn them in different ways. When using a word care must be taken that students understand in just which 'register' (mathematical or otherwise) the term is being used. (s. 57)

Zepp påminer samtidigt om språkets betydelse:

> Jerome Bruner (1973) argues that language is especially important in labelling these higher order concepts, since it facilitates the transfer from one category into another. … it is the role of the teacher to foster the use of higher order conceptual words, according to Bruner, in order to develop the ability to transfer from one classification scheme to another. (s.53)

Vi har tidigare nämnt hur grundskolans kursplan i matematik pendlar mellan matematikerns matematik och en vardagsmatematik, hur resultaten på ämnesproven i matematik har blivit allt sämre samt hur svenska matematiklärare (enligt NCM, 2002) "inte fått stöd och resurser att utveckla en intresseväckande och stimulerande undervisning" (s. 12). … Skolor och lärare förmådde inte svara mot de nya kursplanernas mål" (s. 13). Den främsta orsaken till detta är, enligt vår uppfattning, konflikten mellan matematikerns behov av teori för att utveckla matematiken och vardagsmänniskans (elevens) behov av en funktionell vardagsmatematik. I dagens skola, där lärarna getts större frihet att välja stoff, arbetsform och arbetssätt, blir didaktikens vad- och hur-frågor betydligt viktigare än tidigare. För att möta detta behov måste vi inom lärarutbildningen se till att den ämnesteori de studerande möter gör dem beredda att tolka skolans kursplaner, och att omsätta ämnesteorin i didaktiska termer. Detsamma gäller de viktiga frågorna kring matematikämnets språkbruk och begrepp.

När det gäller de fyra räknesätten ger den akademiska matematikens definitioner enbart en beskrivning av operationernas egenskaper. De ger ringa eller ingen uppfattning om hur räkneoperationerna ser ut, hur formella och informella algoritmer kan byggas upp, vilka förkunskaper detta kräver eller hur elevernas kunskaper kan utvecklas på längre sikt. Inte heller ger dessa definitioner någon hjälp till läraren vad gäller att förstå de stora kulturella skillnader som finns när det gäller talens uppbyggnad, räkneoperationernas utförande och algoritmernas utseende. (Se t.ex. Kilborn, 1989, 2003).

7.2.1 Multiplikation som exempel

Som exempel på de problem som just beskrivits kan man välja definitionen av räknesättet multiplikation. Redan när eleverna i skolan går från addition till multiplikation så höjs komplexitetsnivån betydligt. En elev som inte helt behärskar operationer som $8 + 6$ kan ju alltid räkna efter på fingrarna, men att beräkna $8 \cdot 6$ genom att räkna 6 fingrar åtta gånger eller 8 fingrar sex gånger är betydigt mer komplicerat. Än mer komplicerat blir det när man kommer till multiplikationer som $0{,}3 \cdot 0{,}39$ eller $\pi \cdot 4{,}2^2$. Även om de flesta elever i skolår 9 (med eller utan hjälp av miniräknare) kan tala om vad dessa produkter blir, så är det få av dem som har fått en förklaring till hur detta egentligen hänger ihop och varför dessa multiplikationer fungerar. För de flesta elever handlar detta bara om inlärda procedurer - och det är väl inte den kunskapen man syftar till i skolans undervisning. Än allvarligare är det att varje gång en elev på det här sättet lotsas förbi en förklaring, t.ex. med hjälp av miniräknaren, så har eleven inte bara tappat en viktig pusselbit för att bygga vidare och utvidga sina matematiska kunskaper. Eleven har också fått "bekräftat" att matematik är något man inte kan begripa. Det var denna skillnad mellan tillämpad (vardaglig) matematik och akademikerns matematik som tidigare citerades från Kline (1953) och där en av poängerna var att "Mathematicians do not know what they are talking about because pure mathematics is not concerned with physical meaning." (s. 516)

För att ge en konkret bakgrund, och en klarare uppfattning om vad det här handlar om följer nu två exempel. Det första exemplet, som bör vara välkänt för äldre läsare av tidskriften Nämnaren, är det s.k. Ostproblemet (Nämnaren, nr 3 1982/83). Problemet gavs till elever i skolår 6 och eleverna behövde inte utföra någon egen beräkning. Det räckte för dem att tala om vilket av fyra alternativ som ger det korrekta svaret. Ostproblemet är uppdelat i två uppgifter som lyder så här:

1. En ostbit väger 5 kg. 1 kg ost kostar 28 kr. Man vill räkna ut hur mycket ostbiten kostar. Vilken uträkning skall man göra?

$\frac{28}{5}$ $5 \cdot 28$ $5 + 28$ $28 + 28 + 28 + 8$

2. En ostbit väger 0,923 kg. 1 kg ost kostar 27,50 kr. Man vill räkna ut hur mycket ostbiten kostar. Viken uträkning skall man göra?

$27{,}50 + 0{,}923$ $\frac{27{,}50}{0{,}923}$ $27{,}50 - 0{,}923$ $0{,}923 \cdot 27{,}50$

Lägg alltså märke till att eleverna inte skulle utföra någon beräkning utan endast tala om vilket av fyra beräkningsförslag som är det korrekta. Lösningsfrekvenserna på de båda uppgifterna var 80% respektive 25%. (Observera att sannolikheten att få rätt på en uppgift genom ren gissning är 25%.) Att lösningsfrekvenserna blir så olika har många lärare svårt att förstå: Det är ju i princip samma uppgift. Man har bara ändrat på talen, på pris och kvantitet. Om en elev förstår hur man löser uppgift 1, så borde, menar man, eleven också kunna lösa uppgift 2. Detta är för övrigt ett av de argument man anför när det gäller miniräknarens användning i skolan. Under förutsättning att eleverna förstår uppgiften i sig så blir själva beräkningen av underordnad betydelse. Då kan den med fördel utföras med räknetekniska hjälpmedel. Vad ostproblemet visar är att det här resonemanget inte håller. Det måste vara något fel på det antagande man bygger resonemanget på och förklaringen framgår av följande exempel.

Det andra exemplet har vi hämtat från Pimm (1987). Han lyfter där fram elevers problem med uppgiften $6{,}23 \cdot 0{,}48$ och menar att detta har förorsakats av lärares bristande förmåga att generalisera begreppet multiplikation, en allvarlig lucka i skolmatematikens behandling av räknesättet. Pimms åsikt är att lärare, när de i de lägre skolåren introducerar ett ord eller ett begrepp ger det en begränsad innebörd (ett begränsat register). När begreppet senare utvidgas är det viktigt att den lärare som svarar för detta är medveten om såväl den tidigare som den nya innebörden (med sina begränsningar). Hur skall läraren annars kunna hjälpa eleverna att revidera och generalisera sina uppfattningar om begreppet. På en uppgift av typen $6{,}23 \cdot 0{,}48$ kommer eleverna, enligt Pimm, ofta fram till svar som "slightly taller than the 6.23” eller ”about twelve … But multiplication still makes it bigger” (s. 9). Dessa misstag förorsakas enligt Pimm av den konflikt som uppstår mellan den gamla och den nya uppfattningen av multiplikation.

Så här långt håller vi med Pimm och har liknande erfarenheter. "Det måste ju bli större när man multiplicerar" skulle svenska elever sannolikt säga. Vad Pimm däremot inte klargör är när och på vilket sätt han menar att multiplikationens innebörd har generaliserats. Oftast är det så, att när elever första gångerna möter en multiplikation, så är det frågan om en upprepad addition, typ $6 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$. Köper man sex kolor à 3 kr styck så får man betala 3 kr + 3 kr + 3 kr + 3 kr + 3 kr + 3 kr = 18 kr. För de elever som behärskar multiplikationstabellen finns det en enklare strategi för beräkningen nämligen multiplikationen $6 \cdot 3$ (som man känner till svaret på genom multiplikationstabellen) men de flesta elever uppfattar det fortfarande som en upprepad addition. När eleverna så småningom möter tal i decimalform så kan de i vissa fall använda sig av samma strategi. Uppgiften $6 \cdot 0{,}48$ kan t.ex. fortfarande tolkas som en upprepad addition alltså som $0{,}48 + 0{,}48 + 0{,}48 + 0{,}48 + 0{,}48 + 0{,}48$. Eftersom 0,48 är ungefär lika med 0,5 så är det inte heller så svårt att bestämma ett närmevärde såsom $6 \cdot 0{,}5 = 3$.

Problemet uppstår i ett senare steg, när eleverna möter uppgifter av tytpen $6{,}23 \cdot 0{,}48$. Här kan de inte använda sig av en upprepad addition. De kan inte generalisera det tidigare multiplikationsbegreppet till att 0,48 skall upprepas 6,23 gånger. De rationella talen har nämligen helt andra egenskaper än de naturliga talen. Pimm (1987) uttrycker detta så här:

> At an elementary level, 'multiplication makes bigger' expresses a valid generalisation about the operation of multiplication when applied to whole numbers. When the notation is extended, and the same words and symbols are applied metaphorically to a new situation (either to fractions or to negative numbers, for example) this observation makes sense, but is not longer true. (s. 9)

I det här fallet är vi inte helt eniga med Pimm. Multiplikationens innebörd har enligt vår uppfattning inte alls generaliserats. Den nya innebörden har inte knutits till den gamla utan den gamla innebörden har helt förändrats. Den definition som skolan till en början ger (utgående från upprepad addition) utvidgas knappast till att gälla för rationella tal. Det är inte frågan om att komplettera med ett eller flera tilläggsvillkor. Det krävs helt nya räkneregler för de rationella talen såsom regeln $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Observera samtidigt att decimaltalen enbart är en speciell metod att representera bråktal på och att därför samma räkneregler gäller för multiplikation av decimaltal som för tal i bråkform. För att senare kunna utvidga dessa räkneregler till att gälla för irrationella tal krävs dessutom betydligt mer kunskaper i matematik, t.ex. kunskaper om talföljders gränsvärden. Det verkar som om få högstadielärare ens försöker att förklara det här steget för sina elever.

Det är konsekvenserna av detta dilemma vi ser i skolan. Efter att från början ha infört en enkel och konkretiserbar regel för hur man multiplicerar, en regel som tyvärr bara gäller när multiplikatorn är ett naturligt tal, så inför man plötsligt nya räkneregler. När man gör detta använder man samma ord och symboler som tidigare men konkretiserar sällan och förklarar inte innebörden i de nya begreppen. Inte heller brukar man knyta ihop det nya begreppet med det gamla. Många lärare är nog inte ens medvetna om problematiken. Samtidigt är det idag så lätt att lotsa eleverna förbi problemen med hjälp av en miniräknare.

På en nivå fungerar det här i alla fall. Genom procedurell användning av den nya räkneregeln och med hjälp av en miniräknare kan eleverna oftast räkna rätt på de förutsägbara uppgifter de möter i undervisningen. Problemet är emellertid att de flesta elever fortfarande verkar ha kvar den gamla uppfattningen om multiplikation som upprepad addition. De vet att 6 · 3 blir mer än 3 eftersom man hela tiden lägger till 3 och ibland även att 6 · 0,48 blir mer än 0,48 eftersom man successivt lägger till 0,48. Men när eleverna kommer till 6,23 · 0,48 så känner de inte längre igen sig, eftersom det inte skett någon generalisering. Det är detta som blir så tydligt när man analyserar "Ostproblemet". Många lärare menar att man borde få samma lösningsfrekvens eftersom det i båda fallen handlar om multiplikation och att risken att räka fel har eliminerats. Detta tas också som motivering till att eleverna kan använda miniräknare när de kommer till decimaltal. "Ostproblemet" visar tydligt hur vanskligt ett sådant beslut är.

Ytterligare ett dilemma är att man i svensk undervisning inte längre skiljer mellan multiplikand och multiplikator (båda kallas faktorer). Detta leder till att eleverna tappar känslan för vad som är operand och vad som är operator och inser därför inte (som Pimm påpekar) att svaret borde bli större än 0,48, inte större än 6,23.

Detta kan sammanfattas så här: När man hjälper eleverna att utvidga sina kunskaper från ett talområde till ett annat (t.ex. från att omfatta naturliga tal till att även omfatta rationella tal) så är det viktigt att samtidigt följa upp detta med att omvärdera alla tidigare inlärda termer och begrepp som hör samman med definitionen. För en lärare som behärskar en ämnesdidaktisk teori kan den här omvärderingen leda till intressanta diskussioner med eleverna. Eftersom alltför många lärare saknar sådana teoretiska kunskaper sker detta sällan. De flesta lärare verkar i själva verket varken hjälpa eleverna att generalisera begreppet upprepad addition eller hjälpa dem att knyta samman det nya utvidgade multiplikationsbegreppet med det tidigare. Det är inte svårt att förställa sig konsekvenserna av detta vad gäller elevernas (och lärarnas) förhållningssätt till matematik och till den fortsatta matematikinlärningen.

7.2.2 Varför är det viktigt att ha en teori?

Vi har sedan en tid tillbaka kunnat läsa (t.ex. i NCM:s skrifter, i Stevenson & Stigler, 1992 och i Stigler & Hiebert, 1999) att skolans matematikundervisning (i Sverige respektive i USA) är inne i en kris. Orsakerna till detta är flera, men en av de viktigaste orsakerna är sannolikt brytningen mellan gamla och nya undervisningsmetoder. En gammaldags skola som premierade en procedurell matematikundervisning har successivt bytts ut mot en modernare skola som kräver en konceptuellt inriktad undervisning. Vid den här övergången har man inte alltid tagit till vara gamla beprövade metoder utan har ofta varit för snabb med att förkasta dem och byta ut dem mot nya oprövade metoder. Sådana byten har framförallt varit vanliga när det gäller undervisningsmoment där man tidigare haft de största problemen. Detta är kanske inte så konstigt. Lärare som inte lyckats få eleverna att lära sig multiplikationstabellen, subtraktionsalgoritmen eller addition av bråk, blir givetvis glada och lättade när de nås av budskapet att dessa kunskaper inte är så viktiga längre. Sådana problem löser man ju enklare med hjälp av miniräknare och med informella algoritmer Lärare som på det här sättet blivit av med en del av sin "huvudvärk" reflekterar inte alltid över vilka konsekvenser deras agerande får för elevernas inlärning. Har de verkligen löst problemet på längre sikt eller har de bara skjutit upp problemet och överlämnat det åt andra lärare? Ofta är det tyvärr så att det dröjer några år innan sådana här otillräckliga metodiska lösningar av ett problem leder till en intellektuell konflikt för eleverna. Det brukar inte ske förrän på högstadiet eller i gymnasiet.

För att lärare skall kunna agera på ett mer överlagt sätt måste de ha en teori att falla tillbaka på, en teori som förklarar värdet av olika moment och hur olika moment är relaterade till varandra. Med en god ämnesdidaktisk teori skulle förhoppningsvis lärare, istället för att sluta undervisa om ett visst moment, ha bytt ut metoden, algoritmen eller förklaringsmodellen. Här följer ett konkret exempel som visar problematiken.

Under den senaste matematikbiennalen (Norrköping 2002) hölls en föreläsning med titeln "Aldrig mer algoritmräkning?" (Ahlström, 2002). Budskapet var enkelt. Sluta använda algoritmer för de fyra räknesätten och använd andra enklare metoder som eleverna förstår. För att kunna ta ställning till värdet av en sådan här föreläsning så krävs det att man har en teori att falla tillbaka på. Man måste veta vad som menas med en algoritm och vad det innebär på längre och kortare sikt att sluta undervisa om algoritmer. Om man inte har den kunskapen gör man lätt misstaget att tro att man löser ett problem genom att undvika det istället för att ta tag i det och bearbeta det. Ett annat dilemma är att lärare som saknar kunskaper i en ämnesdidaktisk teori inte kan avgöra värdet av en sådan här föreläsning eller ta ställning i en debatt om dess innehåll. Man blir därför lätt manipulerad av en entusiasmerande föreläsare.

I ovan nämnda föreläsning anfördes argument såsom att "Algoritmräkning är tråkig och enahanda" och "Den bygger på ett flertal motstridiga regler som många elever har svårt att minnas såvida de inte övar kolossalt mycket." För att ta ställning till värdet av algoritmer i sig utgår man i det här fallet inte från fakta och sakfrågor utan från erfarenheter av dålig undervisning (som givetvis har en tendens att bli tråkig och enahanda) och från dåliga val av algoritmer eller mindre lyckade konkretiseringar av dessa algoritmer. Om man väljer olämpliga algoritmer och ger dåliga förklaringar till dess uppbyggnad, så kan det givetvis bli problem med att "minnas" vilket i sin tur leder till att man måste "öva kolossalt mycket" för att kunna utföra något man inte förstår. Men i denna argumentation finns inget av värde för att kunna avgöra algoritmernas vara eller inte vara. Det hade varit betydligt intressantare om den här föreläsningen hade byggt på någon teori så att man sakligt skulle kunnat ta ställning till algoritmernas för- och nackdelar. Kanske är det verkligen så att vissa algoritmer har spelat ut sin roll? Om så är fallet så uppstår frågan vilka eventuella kunskaper eleverna tappar om man tar bort dessa algoritmer och hur man i så fall skall kompensera för dessa förluster. Omvänt kan man fråga sig vilka vinster man skulle göra om man istället valde bättre algoritmer och bättre förklaringar till (och konkretiseringar av) dessa algoritmer. För att kunna ta ställning till detta krävs det, som nämnts, en teori. Den viktiga frågan blir nu hur en sådan teori skall byggas upp.

Rubriken på Ahlströms föreläsning blir ännu mer intressant om man sätter den i samband med den nya roll algoritmer har fått genom dagens snabba och kraftfulla datorer. Många, sannolikt t.o.m. de flesta av dagens datorprogram bygger på rekursioner och algoritmer, så algoritmer har väl aldrig tidigare i historien haft en så stor betydelse som idag. Men vad är då en algoritm? Jo, en (beräknings)procedur som, om man följer den, alltid leder till en lösning av det ställda problemet. Det intressanta med Ahlströms föreläsning är att han, samtidigt som han uppenbarligen inte vill att eleverna skall använda algoritmer, själv ger förslag till nya algoritmer bl.a. följande algoritm för multiplikation:

$$6 \cdot 735 = \left| \begin{array}{c} 6 \cdot 700 = 4200 \\ 6 \cdot 30 = 180 \\ 6 \cdot 5 = 30 \end{array} \right| = 4\,410$$

När eleverna är mer säkra, menar han kan de skriva så här, mer kortfattat:

$$6 \cdot 735 = \quad \left|\begin{array}{l} 4200 \\ 180 \\ 30 \end{array}\right| = 4\,410$$

En intressant fråga blir nu varför skulle det vara lättare att förstå den här algoritmen än någon annan och varför blir inte den här algoritmen "tråkig och enahanda" eller "svår att minnas" och varför måste inte även den övas "kolossalt mycket"?

En annan intressant iakttagelse är att talen i de algoritmer som presenterades under föreläsningen var så valda att man enkelt kan utföra delberäkningarna i huvudet. Om man istället väljer att beräkna andra uppgifter, såsom $6 \cdot 389$, så blir situationen en helt annan. Ahlströms algoritm ger i så fall följande beräkning:

$$6 \cdot 389 = \quad \left|\begin{array}{c} 6 \cdot 300 = 1800 \\ 6 \cdot 80 = 480 \\ 6 \cdot 9 = 54 \end{array}\right| = 2\,334.$$

I det här fallet är det inte lika lätt att göra delberäkningen, alltså 1800 + 480 + 54 i huvudet. Man kan därför fråga sig varför Ahlström inte använder följande algoritm istället, vilket skulle göra det betydligt lättare att hantera additionen:

$$6 \cdot 389 = \quad \begin{array}{lr} & 6 \cdot 300 = 1800 \\ & 6 \cdot 80 = 480 \\ + & 6 \cdot 9 = 54 \\ \hline & 2334 \end{array}$$

När man så småningom kan ta bort den mellersta kolumnen i den här algoritmen så får man den välkända och beprövade långa algoritmen som är minst lika enkel att förstå och använda som Ahlströms förslag? Man skulle i så fall upptäcka att det här inte är något annat än en enklare men mer omständlig form av den vanliga algoritmen och att steget från den här version till den vanliga är mycket kort.

$$\begin{array}{lr} & 3\,8\,9 \\ & \underline{\cdot \quad 6} \\ & 1\,8\,0\,0 \\ & 4\,8\,0 \\ + & 5\,4 \\ \hline & 2\,3\,3\,4 \end{array}$$

För att ta ställning i dessa frågor krävs emellertid att man har en teori som på en begriplig nivå förklarar multiplikationens egenskaper och hur dessa kan utnyttjas på smartast möjliga sätt. (Se t.ex Kilborn, 1989 kapitel 6 eller Löwing & Kilborn 2003 kapitel 7.)

7.2.3 Multiplikation och kontinuitet

Poängen med en ämnesdidaktisk teori i matematik är alltså att den skall bidra till att förklara begrepp inom skolmatematiken och systematisera våra kunskaper inom det kunskapsfältet. En god teori är som en karta som gör det möjligt att finna lämpliga, individuellt anpassade vägval, i en obekant terräng. Om man har problem inom ett kunskapsområde såsom skolans multiplikationsundervisning så är det sannolika skälet att det saknas en teori (en karta) för detta, eller att teorin (kartan) inte överensstämmer mer verkligheten (terrängen), vilket i sin tur leder till att teorin ifråga inte duger till att förklara aktuella begrepp och strategier.

Vad är det då eleverna har problem med och som kräver en förklaring? Här följer två exempel från svenskt forsknings- och utvecklingsarbete.

- Enligt de utvärderingar som gjordes inom PUMP-projektet (Se t.ex. Kilborn, 1979a), så gjorde 54% av eleverna i årskurs 4 fel på minst var fjärde uppgift av typen $6 \cdot 47$. I årskurserna 5 och 6 hade ännu ca. 35% av eleverna problem med minst var fjärde uppgift. Poängen var emellertid inte att kartlägga att en hel del elever hade problem, utan vad skälet till detta var och varför det inte skedde någon kunskapsutveckling mellan skolår 5 och 6. Vad som upptäcktes var att de allra flesta problemen kunde härledas till att eleverna inte behärskade multiplikationstabellen. Detta förklarade såväl de flesta av problemen som bristen på kunskapsutveckling. Vad PUMP-projektets räknefärdighetsundersökning bidrog med var alltså ett av många underlag till en ämnesdidaktisk teori. Å ena sidan kunde man konstatera att de flesta elever inte behärskade multiplikationstabellen, vilket gav speciellt stora problem när delmultiplikationerna kopplades till en minnessiffra såsom i uppgiften $6 \cdot 47$. Å andra sidan ledde problemen med uppgifter av typen $6 \cdot 47$ till följdproblem när eleverna senare mötte uppgifter av typen $46 \cdot 47$. På sådana uppgifter gjorde 55% av eleverna i årskurs 6 systematiska fel på minst var fjärde uppgift. För att förstå och för att kunna åtgärda dessa problem krävs en teori som dels beskriver och förklarar problemens natur, dels ger multiplikationsinlärningen en struktur och som förklarar hur elevers kunskapsutveckling brukar gå till och kan optimeras. I nästa steg krävs det också att teorin, genom utbildning och kompetensutveckling, blir känd bland lärare så att de med dess hjälp inte bara kan analysera problemen och dess ursprung utan även göra de val av "vad" och "hur" som leder till en adekvat lösning av problemen.

- För att få en mer fullständig bild av problemet har vi under de senaste åren även studerat elevers förmåga att multiplicera tal i bråkform och decimalform. Några av resultaten ser ut så här:

Uppgift	Rätt svar skolår 6	Rätt svar skolår 8
$4 \cdot 0{,}2$	75%	82%
$9 \cdot 1{,}50$	62%	65%
$30 \cdot 0{,}04$	60%	62%
$0{,}7 \cdot 50$	45%	51%

Man kan konstatera att uppgiften $9 \cdot 1{,}50$ vållar stora problem. Detta beror enligt vår tolkning på den tidigare nämnda konflikten mellan de olika reglerna för multiplikation. Om eleverna verkligen har förstått multiplikation som upprepad addition och håller kvar vid den uppfattningen så kan $9 \cdot 1{,}50$ tolkas som $1{,}50 + 1{,}50 + 1{,}50 + 1{,}50 + 1{,}50 + 1{,}50 + 1{,}50 + 1{,}50 + 1{,}50$ eller som $9 \cdot (1 + 0{,}5) = 9 + 9 \cdot 0{,}5$. På motsvarande sätt kan man tolka uppgiften $30 \cdot 0{,}4$. Av resultaten framgår att nästan 40% av eleverna i skolår 8 inte ser den här enkla strategin. Man kan av resultaten också utläsa att det inte sker någon större kunskapsutveckling mellan skolår 6 och skolår 8. Vi tolkar det så att många lärare inte ens upptäcker att eleverna har problem. En viktig teoretiskt frågan blir nu hur dessa dåliga kunskaper kan uppmärksammas och förklaras; för om man inte har någon förklaring, hur skall man då kunna åtgärda problemet eller ens förhindra att det uppstår på nytt?

De nyss beskrivna resultaten kan jämföras med de resultat vi fick på ett test om multiplikation av tal i bråkform.

Uppgift	Rätt svar skolår 7	Rätt svar skolår 9
$8 \cdot \frac{1}{2}$	45%	72%
$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$	10%	42%
$1\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5}$	12%	34%

Enligt varje rimlig tolkning av grundskolans kursplan i matematik bör alla elever i skolår 7 veta att 8 halva är lika mycket som 4 hela? Trots detta klarar inte ens varannan elev i skolår 7 den uppgiften i vår undersökning. Även resultatet i skolår 9 är nedslående. När vi visar resultatet på de båda övriga uppgifterna för lärare får vi ofta kommentaren att bråkräkning inte är så viktigt längre. Det förekommer numera så lite bråkräkning i vardagen. Det är räkning med decimaltal som är viktigt. Vi brukar då först visa på resultatet på uppgiften $0{,}7 \cdot 50$ som bara varannan elev kunde lösa i skolår 8. Finns det möjligen ett samband här och är inte också detta bråkräkning fast med en annan nomenklatur? Vi brukar sedan framhålla att bråkräkning är en förkunskap till algebra och frågar vad problem med bråkräkning kan innebära för elevernas möjligheter att fortsätta studera matematik. Det här är ytterligare ett exempel på lärares behov av en skolämnesteori för matematikundervisning och vad teorilöshet kan leda till.

Bråkräkning som är ett av strävansmålen i skolår 9 anses vara svårt att lära sig. Av det skälet låter många lärare sina elever skriva om bråktalen i decimalform innan de utför en beräkning. För att utvärdera om detta leder till en användbar elevstrategi har vi valt multiplikationen $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$ som en av uppgifterna i vårt test. Uppgiften är som synes konstruerad på ett sådant sätt att det går att skriva om den som $0{,}75 \cdot 0{,}4$. I den mån eleverna har utnyttjat detta faktum så har det uppenbarligen inte hjälpt. Bara 42% av eleverna lyckas ju lösa uppgiften i skolår 9.

Mot bakgrund av de problem som just beskrivits kan man fråga sig om dessa elevers lärare har känt till någon teori för att beskriva och förklara de här problemen med multiplikation. Eller är det möjligen så att de känner till en teori men att denna inte är relevant eftersom den inte hjälper lärarna att förklara multiplikationens innebörd för eleverna? I båda fallen är det viktigt att det sker en förändring med tanke på den kris vi, enligt bl.a. NCM, har inom svensk matematikundervisning.

7.2.4 Olika sätt att definiera multiplikation av naturliga tal

För att bringa klarhet i vad som hittills skrivits gäller det nu att reda ut vad som menas med multiplikation. Ett dilemma är därvid att facklitteraturen inte är enig på den här punkten även om skillnaderna ibland är relativt små. Följande definition finns t.ex. i van Hiele (1986).

> Multiplication is the set of real numbers with the exception of 0 defined by the following five rules:
>
> 1. For every two numbers a and b there exists a number a x b.
> 2. There exists a number 1 with the property that for every number a, $a \text{ x } 1 = a$.
> 3. To every number a there exists a number a^{-1} with the property $a \text{ x } a^{-1} = 1$.
> 4. For every two numbers a and b, $a \text{ x } b = b \text{ x } a$.
> 5. For every three numbers a, b and c, $a \text{ x } (b \text{ x } c) = (a \text{ x } b) \text{ x } c$.

Jämför man detta med motsvarande definition i Wahlstöm och Widstrands matematiklexikon (Thompson, 1991) så saknas där regel 3 om inversen till a. Å andra sidan beskriver man där talet 0 som har egenskapen $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$. Man nämner också den distributiva lagen $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ som kopplar samman operationerna addition och multiplikation.

I *Nationalencyklopedin* (1994) ser man emellertid multiplikation på ett helt annat sätt. Först och främst nämner man att multiplikation kan härledas från latinets *multíplico* som betyder mångfaldiga, mångdubbla, förstora. Detta är väl också den uppfattning de flesta människor har av multiplikation. Frågan är när, och av vem, man i skolan ges en annan innebörd av begreppet. Logiskt nog blir konsekvensen av detta enligt *NE*:

> Om m ett tal är ett heltal, innebär multiplikationen upprepad addition: m termer x adderas, $x + x + \ldots + x$. Det givna talet x kan vara ett heltal, ett rationellt tal eller ett reellt tal men även mera allmänt vad som helst för vilket addition är meningsfull (komplext tal, polynom, matris, modul etc.) (Band 13, s.497)

Observera att man i *Nationalencyklopedin*, till skillnaden från de två andra källorna, bygger upp multiplikation som en upprepad addition, där x kan vara ett godtyckligt reellt tal. Det är den här typen av definition som (inledningsvis) är att föredra i en ämnesdidaktisk teori eftersom den är förståelig även för yngre elever. Om och när behov av detta förligger, kan begreppet senare utvidgas till att gälla multiplikation i matematisk mening (som alltså inte handlar om att mångfaldiga x). (Tyvärr har det smugit sig in ett mindre fel i den ovan citerade definitionen. Där det står "om m är ett heltal" borde det stå "om m är ett <u>naturlig</u>t tal". Det är ju lite svårt att upprepa x ett negativt antal gånger!)

När man utvidgar begreppet multiplikation så kan det enligt *Nationalencyklopedin* gå till så här:

> Multiplikation kan utvidgas till negativa tal, varvid man låter $(-m)x = m(-x)$ där högersidan redan är definierad som addition av m termer -x. Om multiplikanden x kan divideras med ett heltal (som är fallet med bråk), så kan även multiplikatorn vara ett bråk: $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ (band 13, s. 497).

Den här utvidgningen av begreppet multiplikation stämmer återigen väl överens med vår uppfattning om hur en ämnesdidaktisk teori bör se ut. Vad man emellertid måste uppmärksamma är att det efter den här utvidgningen inte handlar om upprepad addition eller att mångfaldiga. Man har alltså nu lämnat den konkret förankrade matematiken och ägnar sig åt ett logiskt spel med givna regler. Multiplikation har därmed fått en helt annan innebörd än latinets "multiplico". Givetvis krävs det en teori som hjälper lärare att för sina elever reda ut de här komplicerade begreppen.

En intressant iakttagelse, vad gäller de givna definitionerna, är att de (med undantag av definitionen i Nationalencyklopedin) endast beskriver vad multiplikation är i meningen vilka egenskaper som gäller för multiplikation. Vad definitionerna däremot inte talar om är hur multiplikation utförs. Man får t.ex. reda på egenskaper som att $7 \cdot 1 = 7$, att $7 \cdot 8 = 8 \cdot 7$, men man får inte reda på hur mycket $7 \cdot 8$ är. Det krävs alltså ytterligare definitioner, t.ex. av vad produkten av två tal blir. Vad man här kan konstatera är att bara en av de ovan nämnda definitionerna kan förklara de multiplikationer som sker under de första skolåren.

Eftersom barn först lär sig att arbeta med de naturliga talen, så kan det i en ämnesdidaktisk teori vara lämpligt att börja där. Utgående från elevernas förkunskaper och förutsättningar väljer man i allmänhet att definiera multiplikation som upprepad addition. En sådan definition har bl.a. gjorts av den italienske filosofen och matematikern Peano. Hans axiomsystem bygger på att multiplikation är en upprepad addition och innebär bl.a.

- att 1 är det första naturliga talet och att det till varje naturligt tal a finns ett efterföljande tal a#, (vilket definierar de naturliga talen)
- att för två naturliga tal gäller att a + 1 = a# och att a + b# = (a + b)# (vilket definierar addition)
- och att $1 \cdot a = a$ och $b\# \cdot a = b \cdot a + a$ (vilket definierar multiplikation).

Till dess tre axiom kommer ytterligare ett antal axiom vars funktion är att garantera entydighet och dessutom ett induktionsaxiom för att garantera att axiomsystemet gäller för alla naturiga tal. Vad axiomet om multiplikation säger är i princip inget annat än att om $6 \cdot 8 = 48$ så är $(6 + 1) \cdot 8 = 48 + 8$ alltså att $7 \cdot 8 = 48 + 8 = 56$ (se t.ex. Kilborn, 1989). De här axiomen måste givetvis i en ämnesdidaktisk teori översättas till "normalprosa", men utgående från dem fungerar multiplikation utan komplikationer så länge man arbetar med naturliga tal.

7.2.5 Hur går man vidare med multiplikation av större tal?

Den upprepade additionen är relativt enkel att uppfatta för eleverna. En multiplikation som $3 \cdot 4$ kan uttolkas som 4 + 4 + 4 alltså som 4 taget 3 gånger och kan lätt konkretiseras, först i mönster som

O O O O O O O O O O O O

och därefter i mönster som

O O O O
O O O O
O O O O

I nästa fas gäller det för eleverna att utgående från den här definitionen erövra begreppet multiplikation. Det gör de dels genom att uppfatta och tillämpa räknelagar som

- den kommutativa lagen, alltså att $2 \cdot 6 = 6 \cdot 2$, vilket senare kan utnyttjas vid multiplikationer som $25 \cdot 27 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 27 = 100 \cdot 27 = 2700$,
- den associativa lagen, alltså att $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$ vilket senare kan utnyttjas i uppgifter som $28 \cdot 25 = 7 \cdot 4 \cdot 25 = 7 \cdot (4 \cdot 25) = 7 \cdot 100 = 700$,

dels genom att skapa flyt i räknandet med hjälp av multiplikationstabellen. (Se även Löwing & Kilborn, 2003.) Observera emellertid att det knappast är lämpligt att för dessa unga elever introducera räknelagarna i form av definitioner. De bör istället tillägna sig lagarna genom erfarenhet. Den mer generella definitionen för multiplikation är således inte användbar som en teoretisk grund för hur barn kan bygga upp ett multiplikationsvetande.

När det gäller att multiplicera större tal, är det viktigt att eleverna behärskar den distributiva lagen, alltså att $a \cdot (b + c) = ab + bc$. Det är den distributiva lagen som ger förutsättningarna för att utföra en multiplikation som $37 \cdot 56$ genom att utnyttja smarta och minnesbesparande metoder. De flesta av dessa metoder bygger på distributiviteten alltså att dela upp multiplikationer som $37 \cdot 56$ i $(30 + 7) \cdot (50 + 6) = 30 \cdot (50 + 6) + 7 \cdot (50 + 6)$. I algoritmerna reduceras detta till de enklare delmultiplikationerna $3 \cdot 5$ (hundratal) + $3 \cdot 6$ (tiotal) + $7 \cdot 5$ (tiotal) + $7 \cdot 6$ (ental). Det enda problem som återstår är att fina en god strategi för att hålla ordning på dessa delberäkningar.

När eleverna kommit så här långt har de skaffat sig ett utmärkt och (om undervisningen varit logiskt uppbyggd) förståeligt instrument för att lösa sådana vardagsproblem som leder till multiplikation av naturliga tal. Vad algoritmen handlar om är alltså hur man på ett enkelt och generellt sätt kan hantera de olika delberäkningarna. Observera noga att vi inte har förordat någon speciell algoritm (uppställning) utan bara beskrivit den distributiva lagens centrala roll och att det ibland kan finnas behov av någon form av algoritm. Observera också att en lärare som inte behärskar en teori för algoritmernas uppbyggnad och funktion aldrig kan ta ställning i frågor om val av algoritm eller om algoritmens vara eller inte vara. Det kan också vara på sin plats att påpeka att algoritmerna är en viktig del av matematikens historia, vilket ingår som mål i nuvarande läroplan för grundskolan.

Det är viktigt att understryka att den mer komplicerade definition för multiplikation, den som presenterades inledningsvis, är en nödvändig grund för akademikers arbete med matematik. Problemet är emellertid att samma definition är mindre lämplig i en teori för hur skolbarn bygger upp sitt vetande om multiplikation. Man kan också diskutera om en teori som omfattar den nämnda definitionen är att föredra ens för lärare (och i så fall för vilka) i avsikt att bygga upp en förståelse för innebörden i vardagens multiplikation. Vad än svaret på den frågan blir, så vill vi hävda att läraren behöver betydligt mer omfattande teorikunskaper än så. Läraren måste även ha en teori för hur barn på olika sätt (och i olika kulturer) kan bygga upp kunskaper om multiplikation. I annat fall kan läraren inte möta varje individ på hans eller hennes kunskapsnivå eller ge rimliga och hållbara förklaringar. Det är detta som ingår i en ämnesdidaktisk teori. Ball och Bass (2000) beskriver detta så här:

> Pedagogical content knowledge is a special form of knowledge that bundles knowledge with knowledge of learners, learning and pedagogy. These bundles offer a crusial recourse for teaching mathematics, for they can help the teacher anticipate what students have trouble learning, and have ready alternative models or explanations to mediate those difficulties. (s. 88).
>
> A second problem concerns *how* subject matter must be understood in order to be usable in teaching. We need to probe not just *what* teachers need to know, but to learn also how that knowledge need to be held and used in course of teaching, (s. 97)

Det finns emellertid ytterligare ett viktigt krav på en ämnesdidaktisk teori. På grund av att teorin avser att för lärare förklara hur barn tillägnar sig matematik, så kan man inte ställa alltför formella matematiska krav på den här teorin. Detta betyder inte att den behöver vara felaktig eller strida mot en gängse akademisk ämnesteori. Tvärtom skall den

- dels kunna ge underlag till att bygga upp fullgoda verktyg för att med insikt lösa vardagens alla problem av matematisk natur
- dels kunna fungera som en preliminär, förberedande teori för akademikerns ämnesteori.

I det här sammanhanget passar Martons och Booths (2000) sätt att uttrycka detta bra: "Men vid närmare eftertanke … visar sig dessa helheter, den lärandes ursprungliga idéer, vara ofullständiga snarare än felaktiga. (s. 10)"

Även Säljö (2000) tar upp problemet med de rigida regler för kommunikation som ofta råder i skolan. De som tillämpar dessa regler ser inte vad de leder till utan relaterar istället problemen i skolan till individen och ämnet:

> Det som vi uppfattar som inlärningssvårigheter, och som vi förlägger till individer och deras ”förmåga” att tillägna sig matematik, engelska, samhällskunskap, kan kanske bättre förstås om vi analyserar de regler och traditioner för kommunikation som vuxit fram inom skola och utbildning, och de svårigheter barn (och vuxna) kan ha att identifiera och anpassa sig till dem. ...

> Skolans kommunikativa tradition bidrar både till skapandet av kunskaper och färdigheter hos människor (och i ett historiskt perspektiv är den nivå vi nu nått på såväl spets- som breddutbildning synnerligen imponerande), men också till skapandet av svårigheter att lära och förstå. Det vore alltför blåögt att tro att det sistnämnda är olycksfall i arbetet. (s 12, 13)

7.2.6 Multiplikation i ett utvidgat talområde

Enligt vår uppfattning så behöver det inte uppstå några större intellektuella problem för eleverna så länge de håller sig till multiplikation av de naturliga talen. Problemen kommer när de skall gå vidare och multiplicera två rationella eller två irrationella tal. Den gamla definitionen om att multiplikation är en upprepad addition håller då inte längre. Man kan inte beräkna $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ genom att som addition upprepa $\frac{3}{4}$ två femtedels gång eller beräkna 0,4 · 0,75 genom att upprepa 0,75 fyra tiondels gång. Nu tvingas man istället ge en helt ny definition nämligen att $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Det här är givetvis ett problem som är lösbart och det är just för att kunna knyta samman de två definitionerna till varandra och för att ge kontinuitet i elevernas inlärning som det behövs en ämnesdidaktisk teori. Vi menar att det är avsaknaden av en sådan teori som leder till den typ av problem som vi tidigare gett exempel på. Vad värre är, avsaknaden av en lämplig teori har lett till att alltför många lärare verkar undvika bråk (t.ex. genom att inte längre undervisa om bråk eller att översätta bråken till decimalform) istället för att gå till grunden med problemet. Många lärare är uppenbarligen inte heller medvetna om bråkets betydelse som förkunskap till algebran och skapar därmed problem även för de elever som senare skall studera mer matematik.

Ofta kan man från matematikens historia få värdefulla pusselbitar till en ämnesdidaktisk teori. Det kan därför vara intressant att ställa frågan hur de nyss nämnda problemen hanterades tidigare, i svensk skola. Hur tänkte man sig då steget från upprepad addition till multiplikation av rationella respektive reella tal. Ett exempel på detta har finns i *Matematik NU* (1969) där man i samband med introduktionen av den nya matematiken och *Lgr69* gjorde en seriös ansträngning att bringa reda i svensk skolmatematik:

> När man skall ta reda på hur man ska göra när man multiplicerar två rationella tal kan man naturligtvis använda principen om räknelagarnas permanens.
>
> Ta bråken a/b och c/d. Talet a/b är lösningen till ekvationen bx = a och talet c/d är lösningen till ekvationen dy = c. Ett annat namn för talet a · c är då (bx) · (dy). Vi har alltså (bx) · (dy) = ac
>
> Om man använder de associativa och kommutativa lagarna, som ju bör gälla, kan denna ekvation skrivas (bd) · (xy) = ac

> Vi finner alltså xy = $\dfrac{ac}{bd}$ vilket ger $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{bd}$
> Vi har alltså fått fram hur multiplikation med två rationella tal ska gå till om räknelagarna fortfarande skall gälla. (s. 170)

Observera att man vid den här förklaringen utgått från den formella definition vi tidigare varit tveksamma till. Man kan också konstatera att det bevis som görs är så krångligt att många av dagens lärarstuderande skulle ha problem med att hänga med. Vad man i själva verket gör, är att man försöker efterlikna matematikerns typ av härledning med en något förenklad teknik. Detta är också författarna till *Matematik NU* själva medvetna om och skriver:

> En del menar att detta sätt inte är tillräckligt aktiverande och att det ställer för stora krav på många elever. (s. 170)

Man ger därför också en alternativ förklaring som bygger på intuition och på funktioners invers, vilket är minst lika krångligt.

För att kunna förklara hur en multiplikation av rationella tal går till kände man sig i *Matematik NU* uppenbarligen tvingad att lämna de konkreta förklaringsmodellerna och utgå från någon formell regel. Vi skulle vilja uttrycka det så att man lämnade vardagens <u>räknande</u> och övergick till att arbeta med (formell) <u>matematik</u>. Detta steg kräver en hög grad av formalisering och att man accepterar vissa regler, även om dessa regler inte kan ges en konkret förklaring. En intressant fråga är varför man, när man nu ändå skall formalisera och utgå från räknelagarnas permanens, inte lika gärna kunde definiera multiplikation av två bråk så här $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$ och därefter troliggöra rimligheten med bl.a. hjälp av lämpliga metaforer? Det är sådana här saker man som lärare bör finna svar på i en ämnesdidaktisk teori när man ställer de viktig vad- och hur-frågorna.

Andra typer av förklaringar finner man i Paulsson (1983). Den första förklaringen ser ut så här:

Vad är rimligt?

Typex	4,2 · 3,15 =	Eleven:
	3,15	"Tre gånger fyra är tolv.
	· 4,2 ~~12~~	Då måste lite mer är tre
	630	gånger lite mer än fyra
	+ 1260	vara lite mer än tolv. De-
	13,230	cimaltecknet ska stå efter
		trean." (s. 170)

Problemet är att Paulsson här tar multiplikationsalgoritmen för given. Den har emellertid härletts (får man hoppas) för naturliga tal. Nu använder han den för decimaltal utan att ens fundera över om detta är möjligt eller över vad som egentligen händer med decimaltecknen. Skillnaderna mellan detta förslag och det tidigare är att man i Matematik NU försökte bygga upp en teori medan Paulsson, utan att utgå från någon teori, försökte härleda ett ämnesdidaktiskt "vad" och "hur".

Paulssons andra alternativ bygger på areaberäkning. Han utgår här från en rektangel med sidorna 2 cm och 3 cm som han skriver om som 0,2 dm respektive 0,3 dm. Han finner då att rektangelns area blir 6 cm^2 = 0,06 dm^2. Av detta drar han slutsatsen att $0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$. Men detta är knappast någon förklaring till hur man utför multiplikation av decimaltal. Detta är snarare ett cirkelbevis samtidigt som det är en flitigt använd metafor.

I ett tredje fall skriver han

> $0{,}7 \cdot 2{,}5 = 7 \cdot 0{,}25$
> Eleverna multiplicerar med 10, 100 eller 1000 så att ena faktorn blir ett heltal. Därefter dividerar de den andra faktorn med samma tal. (s. 170)

Det här är lite bättre. Om den kommutativa lagen gäller så finner man att $0{,}7 \cdot 2{,}5 = 0{,}7 \cdot (10 \cdot \frac{1}{10}) \cdot 2{,}5 = 10 \cdot 0{,}7 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{1}{10} = 7 \cdot 0{,}25$. Men den viktigaste frågan kvarstår: Varför blir $2{,}5 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}25$? Det var ju bl.a. det man skulle visa. Paulssons förklaring bygger också indirekt på att $2{,}5 \cdot \frac{1}{10}$ är detsamma som 2,5/10 vilket inte heller har visats eller troliggjorts.

På liknande sätt ser det ut i våra vanligaste läromedel för grundskolan (och ofta även för gymnasieskolan). Det är kanske inte så konstigt att många svenska elever har problem med skolans matematikundervisning och som en följd av detta med universitetets undervisning. Och inte blir det bättre av att de flesta lärare verkar sakna en teori för hur de kan förklara multiplikation på ett rimligt sätt. Som en avslutning på det här avsnittet följer nu ett förslag till hur en ämnesdidaktisk teori om multiplikation skulle kunna byggas upp.

7.2.7 En ämnesdidaktisk modell för multiplikation

Att reda ut de begreppsliga oklarheter som ovan beskrivits är en fråga om ämnesteori inte en fråga om ämnesdidaktik. Ämnesdidaktik handlar enligt Marton (1986) om frågorna

- <u>Vad</u>: alltså om valet av det stoff man skall undervisa om inklusive definitioner och regler.

- Hur: alltså om val av arbetsform och arbetssätt.
- Varför: alltså att ta ställning till legitimiteten, varför det är viktigt att undervisa om just det området och på det sättet

Den här definitionen av ämnesdidaktik verkar de flesta vara överens om. Observera emellertid, att enligt Martons definition av ämnesdidaktik så förutsätts ämnesteorin redan vara given när didaktikens vad, hur och varför skall väljas. I den här rapporten har jag gett flera exempel på vådan av att göra sådana ämnesdidaktiska val utgående från en för ändamålet olämplig eller mindre relevant ämnesteori. Samtidigt som det råder ett symbiotiskt förhållande mellan ämnesdidaktisk teori och ämnesdidaktik, så är det viktigt att teorin alltid blir överordnad didaktiken.

Så här menar vi att en ämnesdidaktisk teori, i stora drag, skulle kunna se ut vad gäller multiplikation.

1. Den ämnesdidaktiska teorin börjar med en introduktion av multiplikation för de naturliga talen. Detta bör ske som en upprepad addition. Den grundläggande idén bör därvid vara att eleverna, genom empirisk erfarenhet från vardag och från laborationer, ges möjligheter att upptäcka att multiplikation är kommutativ och associativ, vad som händer vid multiplikation med 0, 1 och 10, samt att den distributiva lagen gäller (se t.ex. Löwing & Kilborn, 2003).

2. Teorin skall också klargöra hur man gör multiplikation till ett användbart verktyg vid problemlösning och vikten av att eleverna lär sig behärska multiplikationstabellen. Den skall dessutom visa hur man med hjälp av räknelagarna kan hjälpa eleverna att utveckla en god förmåga att räkna i huvudet (se t.ex. Löwing & Kilborn, 2003). I nästa steg bör teorin beskriva hur man kan hjälpa eleverna att utveckla en god förmåga till skriftlig räkning (se t.ex. Kilborn, 1989, kapitel 6). Observera därvid vikten av att det inom ämnesteorin ges exempel på olika metoder för huvudräkning och skriftlig räkning, för- och nackdelar med dessa metoder samt att man använder olika metoder i olika kulturer. Sådana likheter och skillnader bör analyseras på ett sådant sätt att en lärare, dels kan ta ställning till vad som är korrekt, dels avgöra värdet av olika metoder.

3. När de rationella talen införts gäller det att analysera räknesättet multiplikation utgående från de nya förutsättningarna. Detta kan utföras i tre steg
   a) Multiplikation av ett rationellt tal med ett naturligt tal kan ske med hjälp av upprepad addition. Multiplikationen $4 \cdot \frac{1}{5}$ blir då lika med

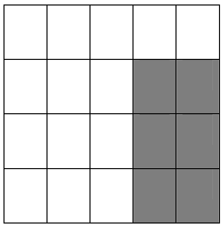
$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ vilket kan tecknas $\frac{4}{5}$ och multiplikationen 4 · 0,2 blir 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 som kan tecknas 0,8.(Se t.ex. Löwing & Kilborn 2003 kapitel 9)

b) Multiplikationer som $\frac{1}{5} \cdot 4$ eller 0,2 · 4 blir svårare att tolka eftersom man t.ex. inte kan upprepa 4 en femtedels gång. Det är nu dags att utnyttja elevernas erfarenhet av kommutativitet och associativitet och låta dessa erfarenheter gå över i räknelagar. Dessa räknelagar antas nu gälla för multiplikation av rationella tal. Fr.o.m. nu kommer matematiken att bli mer formell. Samtidigt blir det viktigt att man med hjälp av metaforer och rimlighetsberäkningar visar på lagarnas relevans.

c) Multiplikationer som $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ eller 0,4 · 0,75 blir betydligt svårare. Här hjälper vaken räknelagar eller upprepad addition t.ex. genom att upprepa 0,75 fyra tiondels gång. Nu tvingas man istället ge en helt ny definition nämligen att $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, dvs. att $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4}$. Observera att man samtidigt börjar fjärma sig en hel del från vardagsmatematiken och att den här typen av kunskaper snarast är att betrakta som förkunskap till fortsatta studier i matematik. Vad- och hur-frågorna kommer vid det här laget att till stor del handla om individualisering av stoffet, alltså att avgöra vad som är uppnåendemål och strävansmål enligt kursplanen, hur man i de olika fallen kan ge kunskapen en lämplig struktur och vilken struktur (och vägval) som lämpar sig bäst för respektive elev.

4. Eftersom det handlar om en <u>ämnesdidaktisk</u> teori är det i det här steget viktigt att i möjligaste mån "konkretisera" de nya och formellt introducerade räknereglerna. Observera att detta samtidigt innebär att man vidgar begreppet multiplikation. Detta kan göras på en rad olika sätt

a) För den som har areabegreppet klart för sig kan man troliggöra multiplikationen $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ genom att använda Paulsson metafor om rektangelns area. Man lägger t.ex. då, i en kvadrat med sidan 1 meter, in en rektangel med sidorna $\frac{2}{5}$ meter och $\frac{3}{4}$ meter på följande sätt:



Av figuren framgår att den skuggade arean omfattar 6 av de 20 rutorna. Arean är alltså $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4}$ m^2 = $\frac{6}{20}$ m^2. För den som vill arbeta med decimalform går det givetvis att använda motsvarande metod. Man kan i så fall välja 10 x 10 eller 100 x 100 rutor. (Se även Löwing & Kilborn 2003, kap 9.2.1)

b) För den som vet att 10 · 0,4 = 4 och att 0,75/10 = 0,075, kan man skriva om 0,4 · 0,75 som 10 · (0,4 · 0,75) / 10 = 4 · 0,75/10 = 4 · 0,075. Man har då reducerat uppgiften till multiplikation av ett bråk med ett naturligt tal.

c) Om man förutsätter att även den distributiva lagen gäller, så kan man finna närmevärden till multiplikationer som 6,2 · 4,1 genom att se det som (6 + 0,2) · (4 + 0,1) viket ger en produkt något större än 6 · 4 = 24.

d) Det är också viktigt att läraren synliggör för eleverna att den nya definitionen inte strider mot den tidigare definitionen av multiplikation som upprepad addition.

$3 \cdot \frac{2}{5}$ kan t.ex. skrivas $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5}$ vilket ger $\frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$ precis som tidigare.

På motsvarande sätt kan man sedan gå vidare och definiera multiplikation av negativa tal och reella tal. (Se t.ex. Kilborn, 1990 kapitel 8)

7.3 Språkets och kulturens betydelse för begreppsförståelse

Vi har i olika sammanhang studerat hur lärare undervisar elever med ett annat hemspråk än lärarens, eller som tillhör en annan kultur än lärarens. Det visar sig då uppstå två typer av problem, dels olika uppfattningar av matmatiska begrepp, dels olika sätt att uttrycka dessa begrepp språkligt. Vissa av dessa problem har beskrivits av Löwing (2000), andra av Kilborn (1993 och 2002). Vad man lär sig av dessa beskrivningar är vikten av att en lärare, i dagens mångkulturella samhälle, kan se den grundläggande matematiken ur ett interkulturellt perspektiv. Kilborns exempel från Hammarkullsskolan i Göteborg är belysande. Här undervisades 53 elever i skolår 6 av tre lärare. Av hans videoinspelningar av elevintervjuer framgår att eleverna använde inte mindre än 16 olika metoder för att utföra en uppställd subtraktion (i algoritm). De tre lärarna behärskade tillsammans tre av dessa metoder. Detta ledde givetvis till konflikter när en av lärarna skulle hjälpa en elev som använde en metod som läraren inte behärskade. Kommunikationen övergick vid sådana tillfällen till en monolog från lärarens sida och en lotsning av eleven på läraren villkor och med lärarens algoritm. Någon meningsfull inlärning för eleverna ägde således inte rum.

Här följer fler exempel på den här typen av kulturella konflikter i undervisningen. För att undvika sådana konflikter är det viktigt att läraren behärskar en teori som beskriver såväl olika konventioner som olika möjligheter att uppfatta begrepp och att uttrycka sig. Detta är inte så komplicerat som det verkar. Tar man subtraktionsalgoritmen som exempel så är möjligheterna till val av uppställning, formellt eller informellt, begränsad av räknelagar och räkneregler. Det gäller bara att uppfatta och kunna tolka variationen. Den lärare som behärskar teorin för detta och som dessutom lärt sig lyssna på sina elever, kan därför uppfatta och genomskåda metoder som hon aldrig har sett tidigare. Med de termer som används i Marton & Booth (2000) ger således en ämnesdidaktisk teorin den *relevansstruktur* som krävs för att läraren (eller den lärarstuderande) skall uppfatta *variationen*.

Den vanligaste undervisningsformen verkar idag vara att eleverna arbetar enskilt, ofta med olika typer av uppgifter (NCM, 2001). När en elev får problem och ber läraren om hjälp uppstår ofta ett dilemma. I den här akuta situationen, som ofta inte kan förutsägas, har läraren i allmänhet bara några få sekunder på sig att uppfatta elevens problem och att därefter finna en lämplig förklaring till eller en lösning av problemet. Detta kräver att läraren behärskar en teori för hur elever, utgående från olika förkunskaper, kan tillägna sig aktuella begrepp eller strategier. Det kräver också att läraren, genom denna teori, har utvecklat ett språk som fungerar vid såväl formella som informella beskrivningar och förklaringar. Av såväl Kilborns forskning på 1970-talet (Kilborn 1979a, 1979b) som av Löwings forskning på 2000-talet framgår det klart att få lärare behärskar en sådan teori. Detta leder i sin tur till att lärarna improviserar, lotsar eleven eller använder sig av falska metaforer för att klara sig ur det akuta dilemmat. På så sätt blir inlärningen ologisk och fragmentarisk sett ur elevernas synvinkel. Enligt vår uppfattning är det här en förklaring till den kris inom skolans matematikundervisning som beskriv av Grevholm (1993) och NCM (2001).

7.3.1 Multiplikand och multiplikator som betydelsebärande termer

I flera länder används termerna multiplikand (det som skall multipliceras) och multiplikator (antalet gånger man skall ta multiplikanden) för att beskriva multiplikation av två tal. (Jämför Nilsson & Wigforss, 1951.) I svensk matematikundervisning används dessa termer inte längre. Båda termerna kallas numera för faktorer. (Se Skolöverstyrelsen 1966, 1979) Detta medför att lärare har förlorat möjligheterna att språkligt beskriva en av de viktigaste poängerna med den kommutativa lagen för multiplikation.

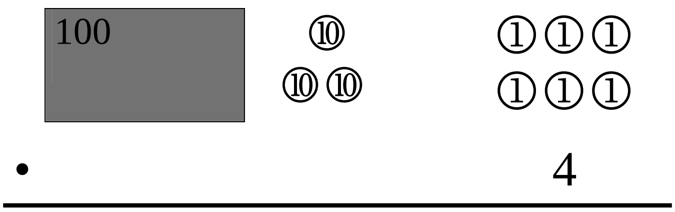
När multiplikation introduceras under de första skolåren så sker det oftast som en upprepad addition. Multiplikationen 3 · 4 får då betydelsen 4 + 4 + 4 som t.ex. kan konkretiseras som det sammanlagda priset för 3 kolor à 4 kr styck. Detta passar väl in på det svenska språkets 3 gånger 4 i betydelsen 4 taget 3 gånger. Här är 4 multiplikanden, det som skall multipliceras och 3 multiplikatorn alltså den som förmerar. På ett språk som tyska blir detta ännu tydligare: *Dreimals vier* är entydigt lika med 4 + 4 + 4.

På andra språk blir det tvärtom. Betydelsen kan då vara elevens 3 ”gångrat med” 4 vilket språkligt är lika med 3 + 3 + 3 + 3. Talet 3 blir då den multiplikand som skall ”gångras” med 4, alltså tas 4 gånger. I det här fallet kommer 3 · 4 att få en helt annan betydelse t.ex. det sammanlagda priset för 4 kolor à 3 kr styck. Visserligen är det sammanlagda priset detsamma nu som tidigare, men i vardagen finns det kvalitativa skillnader på vad man köpt.

På ett flertal språk har 3 · 4 den senast nämnda betydelsen, t.ex. på en del afrikanska språk: På Tswana heter 3 · 4 *Tharu atisa ka nne* och på Xhosa, *Isithatu siphinde kane*. I båda fallen betyder detta 3 repeterat 4 gånger alltså 3 + 3 + 3 + 3. Nu är frågan om detta spelar någon roll. Man kan ju hävda att multiplikation är kommutativ och att det därför är självklart att 3 · 4 = 4 · 3. Detta är möjligen sant för en matematiker, men när dessa begrepp byggs upp inom skolans värld så är det annorlunda. För yngre barn, som just håller på att bygga upp ett matematiskt vetande, är det viktigt att få matematiken konkretiserad och då är 3 kolor à 4 kr definitivt inte detsamma som 4 kolor à 3 kr även om båda produkterna är lika, alltså att priset i båda fallen blir 12 kr. Inte vill väl någon hävda att operationen 7 + 5 har samma betydelse som operationen 3 · 4 på grund av att 7 + 5 och 3 · 4 båda är lika med 12?

Även senare kan det uppstå problem som en följd av att lärare och elever uppfattar multiplikand och multiplikator olika.

- När elever, som inte helt behärskar multiplikationstabellen, skall räkna ut produkter som 6 · 8, så utgår de ofta från att de redan känner till produkten 5 · 8 = 40. Därefter är det bara att lägga till 8 för att få svaret 48. Elever som (via sitt hemspråk) uppfattar 6 · 8 som summan av åtta sexor, gör emellertid ofta misstaget att lägga till 6 istället och få produkten 46. Felet är vanligt när språkbruket för multiplikation är olika på undervisningsspråket och hemspråket.
- När man skall beskriva priset för 4 varor à 136 kronor, i avsikt att utföra en formell eller informell beräkning, så kan man t.ex. konkretisera detta så här, med innebörden att 4 elever skall betala 136 kr var.



  Man utgår då från multiplikatorn, 4, och räknar 4 · 6 enkronor, 4 · 3 tior och 4 · 1 hundralapp. I det här fallet spelar det emellertid en väldigt stor roll vad som är multiplikand och multiplikator. Om en elev uppfattar 4 · 6 som sex fyror så blir den konkretiserande bilden ovan helt fel och leder inte till någon förståelse för multiplikationen i fråga. Exakt denna konflikt uppstår ofta under matematiklektioner i Sydafrika när läraren som undervisar på engelska, och utgående från en engelsk metodik, tvingas göra en s.k. code switch och förklara på elevernas hemspråk Tswana. (Se även Adler, 1999 och Setati, 1998)
- Eftersom de vanligaste metoderna att utföra en multiplikation bygger på den distributiva lagen, så skulle man också kunna tänka sig att utföra multiplikationen 4 · 136 med någon annan metod, t.ex. som 4 · (125 + 11) = 500 + 44. Men hur ska man förklara detta för yngre barn om man inte betraktar 136 som multiplikand?

Vad man lär sig av detta är att man i dagens mångkulturella skola behöver en teori som reder ut hur det här hänger ihop så att, i det här fallet multiplikation, kan förklaras på ett konkret och generaliserbart sätt och med ett relevant språk. Här räcker inte den akademiska ämnesteorin och språkbruket till. En som studerat språkets roll i undervisningen är Zepp (1989). I *boken Language and Mathematics Education* skriver han så här om skillnaden mellan matematiskt språk och vardagsspråk:

> Teachers should also be aware of that real life concepts and mathematical concepts may be very different and that students may learn them in different ways. When using a word care must be taken that students understand in just which 'register' (mathematical or otherwise) the term is being used. (s. 57)

7.3.2 Språket betydelse för förståelse av nya begrepp

Under våra lektionsstudier av såväl svenska som invandrade lärares undervisning har vi observerat en stor osäkerhet vad gäller språket för division. (Se t.ex. Löwing 2000 och 2001) Följande variation fann vi under en enda av dessa lektioner. (L står för läraren och E1- E3 för olika elever)

L: Om du dividerar den på den får du …?
…
L: Hur många gånger går 3 i 7?
…
E1: 4 i 1… det blir 4
L: Det står 1 genom 4 hur många 4 finns i 1?
…
E2: 100 delat på 5 …
…
L: Vilket tal går att dela 24 och 36 med.
E3: 24 delat i 4 …?
…
L: Kan du dela 4 och 6 med samma tal?
E4: 4 delat med 6?
…
L: Dela 4 på 7

Lärare och elever verkar i de här fallen inte vara överens om betydelserna av orden *i*, *med* och *på* och så här ser det ut i alltför många klasser. Frågan är varför. Ett svar på frågan finner vi genom att gå tillbaka till svensk undervisning på 1950-talet. Då lärde sig eleverna två olika sätt att dividera, delningsdivision och innehållsdivision. (Se t.ex. Nilsson & Wigforss, 1951 och Kilborn, 1989)

- Delningsdivision kan beskrivas så att man har ett antal föremål och skall fördela dem lika ett efter ett. Det kan t.ex. handla om att 24 karameller skall delas lika mellan 6 barn.

- Innehållsdivision kan beskrivas som att man vill ha reda på hur många gånger man kan ta ett visst antal föremål från en given mängd med föremål. Frågan kan t.ex. vara hur många bussresor á 6 kr man kan göra om man har 24 kr.

Om vi nu återgår till prepositionen "i" så får den olika betydelser i de här två fallen. Att dela 24 karameller i 6 högar" ger svaret 4 karameller medan svaret på frågan "Hur många gånger 6 ryms i 24" ger svaret 4 (gånger). Det är bl.a. detta många elever (och lärare) blandar samman. Zevenbergen (2000) tar upp liknande problem på ett mer generellt plan i artikeln "*Cracking the Code*". Hon pekar dels på ord som i matematiska sammanhang har en helt annan betydelse än i vardagsspråket *såsom ruler, prime, odd, mean, rational, root* och *mass*. Hon pekar också på nyanser som kan misstolkas såsom *sum/some*, *whole/hole*, *off/of* och *tens/tenths*. Vi känner igen detta från motsvarande ord i svenskan. Hon tar sedan upp problemet med användningen av prepositioner som kan vara förvirrande:

> The temparature fell to 10 degrees … by 10 degrees… from 10 degrees; and the effect of omitting the preposition: the temperature fell 10 degrees. (s. 206)

Ett annat problem som nämns av Zevenbergen är s.k. *trigger words*, såsom mer, mindre, fick och gånger och som leder till en form av lotsning. Uppgiften ”Olle har 10 kr och Anna har 12 kr. Hur mycket mer pengar har Anna?”, leder lätt till addition på grund av ordet mer. På motsvarande sätt leder ofta uppgifter som ”Hur många gånger kan du åka buss om du har 24 kr och en bussresa kostar 6 kr?” till multiplikation på grund av ordet gånger. Vi vill emellertid hävda att problemet ofta är ”självförvållat”. Om man som lärare själv är slarvig med sitt språk eller inte ägnar tillräcklig uppmärksamhet åt elevernas användning av språket så blir elevernas språk lidande, speciellt om läraren prioriterar att eleverna löser många uppgifter framför att fördjupa sig i få uppgifter.

Än värre blir det när lärare är så slarviga med, eller osäkra på, terminologin att de byter ut viktiga substantiv mot pronomen eller blandar in vardagsord som saknar den precision som krävs. I Löwings forskning hittar vi en rad sådana situationer. Följande kommunikation har iakttagits under lektioner på högstadiet:

> Lärare 1: Om du dividerar den på den så får du?
> Elev 1: 8
> Lärare 1: En åttondel eller hur? Och den, då måste den vara lika med Evas vinst.
> …
> Lärare 1: Men det där är annorlunda. Det är större där uppe än vad det är där nere.

…
Elev 2: Ja har inte den där andra grejen. (Avser en cylinder)
…
Lärare 2: Hur ser bottenarean ut (Avser forfarande en cylinder)
Elev 3: Rund.
…
Lärare 2: Vilken geometrisk form har basytan i din pyramid
Elev 4: Rund.
Lärare 2: Den är väl inte rund?
Elev 4: Trekantig …. Fyrkantig.

Elev 5: Du, Lisa, skall man räkna det gånger det … när man skall räkna volymen av dom?
Lärare 3: Hm varför då?
Elev 4: För dom var ju … vad det heter … vad det heter … hur stor den är.

Lärare 5: Fyrkantiga saker, rektanglar och kvadrater, kan vi räkna ut … hoppas jag. På runda saker har vi inte lärt oss än. (Gäller area)
…
Lärare 5: Så ritar vi in cirkeln (som har radien 5 cm) i en fyrkant…. Hur stor är kvadraten? (Läraren avser arean.)

Det finns all anledning att fundera över vad som händer när en elev skall försöka uppfatta nya begrepp och läraren inte har (eller inte ser till att eleven tillägnar sig) ett klart och tydligt språk för att beskriva begreppet. Zevenbergen (2000) kommenterar detta så här med hänvisning till Bernstein.

> Elaborated code uses complex sentence structure, grammatical order, prepositions to show logical and sequential ordering, and a high degree of hierarchical organization. Restricted code uses shorter sentences and much is more limited in its choice of adjectives, adverbs, and prepositions. … However according to Bernstein, lower-class children have little access to the elaborated code, which is the code used in school. (s. 198)
>
> In his later work, Bernstein abandoned some of his earlier terms in favour of the notations position-oriented and person-oriented families. … For example, position-oriented language tends to use pronouns whose antecedents are not clear to the outside listener, … A person-oriented child, on the other hand, will tend to use the noun or person's name in order to make it explicit to whom he is referring. (s. 199).
>
> The implications for the classroom are the same as those of Bernstein's earlier theory; the position-oriented students will not be used to the explicit language of school. This would be especially true of the mathematics classroom, where the precision of language is particulary important. (s. 200)

Det som gör det här problemet ännu mer komplicerat än vad Zevenbergen (via Bernstein) beskriver är, att alltför många lärare idag själva använder sig av en restricted code (är position-oriented) vilket torde leda till att de flesta elever också blir position-oriented, dvs. utrycker sig på ett vagt och svårtolkat sätt. Vi ser detta som en viktig orsak till de problem man har idag inom den mer matematikintensiva akademiska undervisningen. Om man som elev inte har ett klart och enkelt språk att utgå från är det svårt att ta ett nytt steg och transformera detta språk till ett mer utvecklat språk, t.ex. att gå från vardagsanknutna metaforer till det matematiska begrepp som skall lyftas fram med metaforen. Zepp (1989) skriver om detta:

> In mathematics, hierarchies can become quite complex. … Jerome Bruner (1973) arges that language is especially important in labelling these higher order concepts, since it facilitates the transfer from one category to another. … It is the role of the teacher to foster the use of higher order conceptual words, according to Bruner, in order to develop the ability to transfer from one classification to another. (s 53)

Men om detta inte sker? Ja, i så fall blir eleven utslagen från vidare studier av matematik eller som Zevenbergen (2000) beskriver det:

> By considering the teaching of mathematics as a cultural event, we can see that there are aspects of pedagogy and curriculum that can exclude some students. By understanding how the patterns of language, work and power are implicated in the construction of mathematics, it becomes possible to understand how we can change our practices i order that they become more accessible and equitable for our students. This is not to suggest that the mathematics be watered down. Rather we should consider the practices within which mathematics is embedded – linguistic, social, and contextual – in order that it becomes more accessible to more students. (s. 219)

Det här avsnittet kan sammanfattas så här. Kommunikationen i klassrummet kräver ett entydigt språkbruk. Om läraren själv har ett dåligt utvecklat undervisningsspråk eller är slarvig med sitt språk, så får detta konsekvenser för elevernas möjligheter att uppfatta kommunikationens innebörd på ett korrekt sätt. Eftersom språk och begrepp är intimt kopplade till varandra, så leder ett oklart språk inte bara till oklara begrepp utan eleverna får dessutom problem med att senare urveckla och fördjupa dessa begrepp. Vad Löwings forskning dessutom uppmärksammar är bruket av termer som lärare använder vid laborativt arbete och vid vardagsanknytning av undervisningen. Dessa termer är oftast oklara i sig samtidigt som de saknar en logisk koppling till mer formella termer för de begrepp lärarna avser att konkretisera. Att reda ut detta är ett annat viktigt innehåll i en ämnesdidaktisk teori.

7.3.3 Kulturens betydelse vid byte av divisionsalgoritm

Det finns ytterligare en orsak till den förvirring som råder när det gäller språkbruket vid division. Förvirringen förorsakades av upprepade byten av algoritm. Av tradition hade man i Sverige (före grundskolans införande) tecknat divisionsuppställningen med dividenden (det som skall delas) till vänster och divisorn till höger. Divisionen 228 : 6 tecknades oftast så här med s.k. italiensk uppställning:

```
  2 2 8 | 6
 - 1 8  | 3 8
    4 8
   - 4 8
       0
```

I *Matematikterminologi i skolan* (Skolöverstyrelsen, 1966) skrevs istället samma division 248/6 och uppställningen byttes ut mot den USA-inspi-rerade s.k. trappan:

```
          3 8
   6  | 2 2 8
        - 1 8
          4 8
        - 4 8
            0
```

Den nya uppställningen ledde snart till nya problem som bl.a. hade att göra med ordningen på täljaren (dividenden) och nämnaren (divisorn). Divisionen ovan tecknas 228/6 alltså med täljaren till vänster, men i uppställningen står nämnaren till vänster. Detta ledde till förväxlingar för de elever som inte förstod innebörden i divisionsalgoritmen utan arbetade procedurellt. För att lösa detta nya problem införde man några år senare ännu en ny algoritm, den s.k. liggande stolen, där ordningen på täljare och nämnare återigen byttes. (Se Skolöverstyrelsen, 1979):

```
  3 8
 2 2 8 |  6
 - 1 8
    4 8
  - 4 8
      0
```

Eftersom man i allmänhet läser från vänster till höger innebar dessa byten i sig en hel del problem med algoritmspråket, alltså det språk man använder när man utför och förklarar algoritmens olika steg. I dag verkar de flesta lärare ha bytt algoritm ännu en gång, nu till en s.k. kort algoritm (se nedan).

Vad kan man då lära oss av detta? Jo, när man byter till en ny algoritm eller till en ny metod, så gäller det att ha tänkt igenom om den nya algoritmen eller metoden passar i vår kultur och i annat fall hur en anpassning skall ske. Det gäller också att tänka igenom hur språket påverkas av bytet så att man kan undvika inkonsekvenser och missförstånd. Ännu viktigare är det emellertid att tänka igenom vad bytet i sig innebär. I det här fallet ledde bytena till trappa och stol inte till några intellektuella fördelar. Alla deloperationer förblev i stort sett desamma. Man bytte bara plats på dividend, divisor och kvot. Om vi på den tiden haft en hållbar ämnesdidaktisk teori, så skulle dessa onödiga byten av divisionsalgoritm kunnat undvikas. Bytena av algoritm motiverades nämligen med att det fanns smärre metodiska vinster (av procedurellt slag) att göra. Detta är ett utmärkt exempel på vådan av att fatta ämnesdidaktiska beslut som inte förankrats i en relevant ämnesteori. (För närmare detaljer, se Kilborn, 1989 kapitel 7.) Observera också vådan av att importera didaktiska idéer från en annan kultur (såsom trappan från USA) utan att reflektera över konsekvenserna av detta och utan att först anpassa idén till vår egen kultur.

Mot den just beskrivna bakgrunden kan man bilda sig en uppfattning om vilka problem som kan uppstå för elever som kommer från andra kulturer än den svenska. De problem som många lärare upplevde i samband med byten av divisionsuppställningarna blir ju knappast mindre för de invandrade elever (och deras föräldrar) som i svensk skola möter algoritmer som är annorlunda än de (och/eller deras föräldrar) lärt sig. I dagens mångkulturella skola krävs det därför en ämnesteori som beskriver olika möjligheter att angripa ett problem, t.ex. att ställa upp en algoritm, att arbeta med decimaltal eller att lösa en ekvation. En sådan teori skulle också ge läraren möjligheter att bättre förstå invandrade elever och hjälpa dem att överbrygga kulturella problem. I dag förkastas istället de metoder som invandrade elever eller deras föräldrar har med sig, trots att de är funktionella och ofta även bättre än de traditionella svenska metoderna. Med en god ämnesteori i botten skulle lärare istället kunna lära sig en hel del matematik av invandrare elever och därmed utvidga sitt ämnesdidaktiska register.

Som en avslutning på det här avsnittet ges nu ännu ett exempel på vart teorilöshet kan leda. Problemet uppstår som en följd av elevers svårigheter med divisionsuppställningen (och alla de byten av uppställningar som just beskrivits.) För att undvika dessa problem verkar många lärare idag ha övergått till en s.k. kort algoritm. Man använder då en typ av algoritm som utvecklades under senmedeltiden och som ser ut på följande sätt:

För att dividera 247 med 7 ställer man upp divisionen så här:

$$\frac{2\,4\,7}{7} =$$

7 går upp 3 gånger i 24 tiotal. Man noterar 3 i kvoten. Eftersom 3 gånger 7 är 21, så är det 3 kvar av de 24 tiotalen. Man stryker nu 24 och skriver de resterande 3 tiotalen ovanför 4an i 24. Kvar att dividera finns nu 37 ental.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{2\,4}}\,7}{7} = 3$$

7 går upp 5 gånger i 37. Man noterar 5 i kvoten. Eftersom 5 gånger 7 är 35 blir det 2 kvar. … Svaret blir alltså 35 och det blir en rest 2.

$$\frac{\overset{\cancel{3}\,\cancel{2}}{2\,\cancel{4}\,\cancel{7}}}{7} = 3\,5$$

När vi diskuterar den här uppgiften med lärare (eller lärarstuderande) brukar så gott som alla ange svaret på uppgiften till 35,265714… ofta avrundat till något lämpligt tal såsom 35,27. Vi brukar då fråga varför de använder decimaler. Är detta ett rimligt svar om t.ex. 7 barn skall dela 37 plommon? De flesta av de lärare och lärarstuderande vi ställt den frågan till har uppenbarligen aldrig reflekterat över skillnaden mellan att svara 35,27 och 35 2/7 eller 35 rest 2. Bristen på ämnesdidaktisk teori har i det fallet lett till att lärare, och därmed deras elever, söker enkla, procedurella lösningar, istället för att reflektera över innebörden i vad de gör. Carlgren & Marton (2000) uttrycker detta så här:

> …i stället för att i först hand fråga, Hur skall jag lära ut division?, Hur skall jag få mina elever att förstå fotosyntes?, Hur skall jag bära mig åt för att höja deras historiska medvetenhet?, bör vi börja med att ställa frågor av typen: Vad innebär det att behärska division, att förstå fotosyntes, att vara historiskt medveten? Vad är det som är viktigast? Vad är nödvändigt? Vad är det som inte får tas för givet? (s 27)

En annan intressant fråga som uppstår vid diskussion av kort algoritm gäller vad som händer vid en eventuell övergång till den vanliga algoritmen. Den korta algoritmen blir nämligen krånglig om man skall dividera med flersiffriga nämnare (divisorer) eftersom det leder till s.k. galärdivision (se t.ex. Thompson, 1991 s. 636 ff och Kilborn, 1989 kapitel 7). (Observera att det som här relateras enbart är det problem som brukar uppstå, inte huruvida elever skall lära sig den "långa" algoritmen.) Problemet är att elever som skall byta från den här korta algoritm till en lång algoritm (t.ex. till stolen) måste byta strategi. Det är åtminstone vad de flesta lärare verkar tro. Vi brukar då visa att man mycket väl kan arbeta med kort algoritm i stolen (eller trappan …). Alla deloperationerna blir i så fall likadana som de vi tidigare beskrivit. Det enda som förändras är egentligen den plats där man gör sina successiva noteringar:

```
   3 5
 2 4 7 | 7
   3 7
     2
```

Observera alltså än en gång att den enda egentliga skillnaden mellan de två algoritmerna är hur mellanleden (de successiva resterna) noteras. När vi kommit så här långt brukar det bli livliga protester bland lärare och lärarstuderande. "Så här får man väl inte göra?" "Detta är inte den korta algoritmen!" …. Återigen kan vi se följderna av teorilöshet och hur denna teorilöshet leder till att man fastnar i intellektuella låsningar och procedurella lösningar. Man har således inte på djupet förstått algoritmens innebörd. Man har tagit en viss procedur för given istället för att se dess funktion.

Nästa steg är intressant. Vad som skiljer den här korta algoritmen (utförd med "stolen") från den långa algoritmen (utförd med "stolen") är bara att man skrivit dit några mellanled som man tidigare utfört i huvudet. (Alltså att $7 \cdot 3 = 21$ och att $7 \cdot 5 = 35$. Vi fyller nu i dessa mellanled (i halvfeta typer) och nu har vi den långa algoritmen. Konstigare är det inte.

```
   3 5
 2 4 7 | 7
-2 1
   3 7
  -3 5
     2
```

Vi finner alltså att om man byter notationssätt i den korta algoritmen, så får man den långa algoritmen på köpet. Det här är ett typiskt exempel på hur didaktikens vad- och hur- frågor är helt beroende av en ämnesdidaktisk teori. Divisionsalgoritmens nutidshistoria är ett utmärkt exempel på vilka problem teorilösheten har lett till, och fortfarande leder till, i våra skolor.

7.3.4 Matematikspråkets semantiska struktur och redundans

Zevenbergen (2000) tar i sin artikel upp en annan intressant diskussion nämligen om matematikämnets *semantiska struktur*. En utsaga som $3 + 2 = 5$ kan t.ex. turneras på flera olika sätt. Ett enkelt exempel är $3 + 2 = x$ som med hjälp av vardagsspråk kan uttryckas som ”Du har 3 kronor och får 2 till. Hur många kronor har du då?” En betydligt krångligare variant är x + 2 = 5 såsom i uppgiften ”När Olle fått 2 kronor av sin syster hade han sammanlagt 5 kronor. Hur mycket hade Olle från början?”

Zevenberger fördjupar sig inte i detta problem, men det är just den här typen av semantisk komplikation som ger så många elever problem när de arbetar med uppgifter som behandlar hastighet, ström eller tryck. När t.ex. elever på fordonsteknisk utbildning skall räkna på bromsars tryck använder de oftast den traditionella ekvationen

$$(p =)\ \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}.$$

Ekvationen bygger på att trycket (p) är konstant i hela bromssystemet. Den kraft F_1 som verkar på huvudcylindern dividerat med huvudcylinderns basarea A_1 blir därför lika med den kraft F_2 som alstras i en hjulcylinder dividerat med hjulcylinderns basarea A_2.

För de elever som är relativt duktiga i matematik leder en sådan här ekvation inte till några större problem. Däremot leder det till oöverstigliga problem för elever på fordonsutbildningen (varav flertalet brukar få "Icke godkänd" på A-kursprovet i matematik), speciellt om de söker A_1 eller A_2 eftersom detta leder till att man får en obekant (x) i nämnaren. Om man istället utgått ifrån formeln $F = p \cdot A$ så skulle det ha blivit en fråga om enkel proportionalitet. Om t.ex. hjulcylinderns basarea A_2 är dubbelt så stor (k gånger så stor) som huvudcylinderns basarea A_1, så får man direkt att kraften F_2 är dubbelt så stor (k gånger så stor) som kraften F_1. På motsvarande sätt kan man byta semantisk struktur inom en rad tillämpningar och därmed ge fler elever (och yrkesarbetare) möjligheter att göra matematiska beräkningar. (För fler exempel, se Löwing & Kilborn 2002 och Maerker 2001). Ett viktigt inslag i en ämnesdidaktisk teori bör således vara analyser av skolmatematikens semantiska strukturer för att därigenom göra beräkningsmetoder och strategier mer tillgängliga för vardagsmänniskan och för att utveckla mer hanterbara matematiska verktyg.

Zevenbergen tar också upp vad hon kallar *local density* dvs. kompaktheten och den höga precisionen i matematiska texter. Han konstaterar att

> Mathematics tasks are often characterized by their conciseness and preciseness, where there are few redundant words and where all words have highly specific meaning. (s. 207)

Eftersom elever inte är vana vid texter av det här slaget får de problem med att koda av texten och översätta den till en matematisk operation. Även i det här fallet krävs ett par kommentarer. För det första behöver man inte skriva så här kompakta texter. Åtminstone inte för elever under de första tio skolåren. Och om man gör det bör man också ta konsekvenserna och lära eleverna att läsa, översätta och tolka sådana texter.

Ett exempel på överdriven formalism i grundskolan är prioriteringsregeln (att multiplikation utförs före addition) som vållar problem för många elever. För att undvika sådana onödiga problem, (åtminstone inledningsvis) borde man skriva 3 + (4 · 5) och inte det (för eleverna) tvetydiga 3 + 4 · 5. Detta kan ju helt i onödan misstolkas som (3 + 4) · 5. På motsvarande sätt borde man vara tydligare när man hanterar algebraiska uttryck. Många onödiga problem skulle undvikas om man (åtminstone till att börja med) skrev $\frac{(x+5)}{2x}$ istället för $\frac{x+5}{2x}$ och $\frac{x}{(2+x)}$ istället för $\frac{x}{2+x}$. Att $2\frac{1}{2}$ betyder $2 + \frac{1}{2}$ medan $a\,\frac{b}{c}$ betyder $a \cdot \frac{b}{c}$ är en annan inkonsekvens som många lärare inte verkar göra eleverna uppmärksamma på.

I detta sammanhang bör man också observera såväl slarv med vedertagen terminologi som överdriven stringens. Ett exempel på slarv har vi redan nämnt i samband med de prepositioner som används vid division. Ett annat exempel är när man läser 2,10 som två komma tio och 2,9 som två komma nio. Med ett sådant språkbruk är det inte så konstigt att många elever anser 2,10 vara större än 2,9. Att läsa 2,10 som två komma ett noll eller ännu hellre som två hela och tio hundradelar (och 2,9 som två hela och 9 tiondelar), vilket man gör på flera andra språk, skulle sannolikt eliminera de flesta av dessa misstag.

Pimm (1987) påpekar i detta sammanhang (och hänvisar till Kane m fl 1974) att språket vid matematikundervisning är en blandning av vardagsspråk och ”matematiskt språk”. Eftersom en hel del av de ord som används byter betydelse vid byte av kontext kräver detta en stor försiktighet från lärarens sida.

> Many confusions occur as a result of differing linguistic interpretations, where the teacher, for instance, might be employing terms from what has been losely called a mathematical ’dialect’, with the pupils interpreting everything they hear as ordinary English, thus trying to use non-mathematical meanings in the mathematical context. (s. 75)

För en matematiker är det nödvändigt med hög stringens i språket. Att använda ett vardagsspråk skulle i matematikerns arbete leda till oöverstigliga problem. Samtidigt blir det språk som för matematikern är effektivt och ändamålsenligt närmast oförståeligt för lekmannen. För grundskolans lärare och elever gäller det därför att använda ett språk som ligger nära vardagsspråket men ändå är matematiskt tydligt. Av Löwings (2004) analyser av klassrumsspråket framgår det att man idag saknar ett tydligt matematikdidaktiskt språk i skolan. Detta leder till att lärare och elever ofta talar förbi varandra eller missförstår varandra. Mot detta kan man invända att det finns en bok, *Matematikterminologi i skolan* (Skolöverstyrelsen 1979), som beskriver de termer som skall användas. Visserligen är boken gammal men den duger fortfarande. Problemet är bara att terminologiboken enbart beskriver vilka <u>formella</u> termer som skall användas, inte hur man på vardagsspråk eller utgående från ett laborativt arbete kan knyta samman och förklara dessa termer. En ämnesdidaktisk teori bör givetvis innehålla även en sådan preliminär terminologi eftersom denna terminologi måste användas för att bygga upp motsvarande preliminära begrepp.

7.4 Negativa tal och exempel på metaforer i undervisningen

De begrepp man rör sig med i matematikundervisningen, i kombination med det speciella språk man använder, kan för många elever vara svåra att uppfatta. Av det skälet strävar man som lärare efter att konkretisera.

> En viktig aspekt av kunnandet är elevens förmåga att uttrycka sina tankar muntligt och skriftligt med hjälp av det matematiska symbolspråket och med stöd av konkret material och bilder. (Skolverket 2000a s. 29)

Ibland sker konkretiseringen med hjälp av laborativa material, ibland med hjälp av analogier eller metaforer. Användningen av metaforer måste emellertid ske med omsorg. Man bör t.ex. noga skilja mellan *äkta metaforer* och *falska metaforer* och mellan två olika bruk av metaforer, nämligen att arbeta *inom en metafor* respektive *via en metafor* (utgående från en metafor). Vi börjar emellertid med att presentera Pimms (1987) beskrivning av *extramatematisk* och *strukturell* metafor.

> Analogy and metaphor come to mind as powerful linguistic technices for creating new meanings. They offer means by which the less familiar may be assimilated to the more familiar, by viewing the former in terms of the latter. In this section, I examine the concept of metaphor in mathematics, in relation firstly to the transfer of terms from ordinary language, and secondly to the use of metaphoric extension inside the mathematics register itself. Metaphor and analogy are figures of speach which make natural language powerful, and I suggest that there are comparable processes at work in mathematics itself, as well as metaphor being commonly employed in its teaching. (s. 93)

Pimm ger därefter exempel på enkla metaforer som är lånade från vardagsspråket:

> What are some examples of metaphor from the English mathematics register? … concider the process images embedded in the following apparently technical terms of mathematics: *tangent* (touching) and *secant* (cutting), … *carrying* in arithmetic, *face* in the tree-dimensional geometry and the use of geometric terminology in non-geometrical contexts, such as referring to numbers as *triangular* or *square*. (s. 95)

Han delar sedan upp metaforerna i två huvudgrupper:

> There are two main sourses of metaphor which may be of interest in mathematics education. The first consists of what I term *extra-mathematical metphors*. These attempt to explain or interpret mathematical ideas and processes in terms of real world events, and such metaphors can involve everyday objects and processes. Examples include*, a graph is a picture, modular arithmetic is clock arithmetic* or *a linear equation is a gear*. The second main source, which I call *structural metaphors* and address in the next section, involves a metaphoric extension of ideas from within mathematic itself. (s. 95)
>
> Extra-mathematical metaphors are sometimes employed overtly in classrooms. The terminology of *having* and *owing* is used in the context of positive and negative numbers. *A function is a machine or* an *equation is a balance* provide two further very common pedagogic instances. (s. 99)

Exempel på strukturella metaforer är enligt Pimm ”the *slope* of a line, *spherical* triangle" och "a complex number is a *vector"*. Det är i första hand det som Pimm kallar extramatematiska metaforer som här kommer att studeras närmare.

Eftersom kommunikationen av kunskap är av avgörande betydelse för att bygga upp (konstruera) kunskap, så måste inte bara en formell terminologi utan även informell terminologi ingå i en ämnesdidaktisk teori. I skolans undervisning är konkretisering och metaforer viktiga inslag i kommunikationen. Analyser av för- och nackdelar med användandet av olika laborativa metoder och metaforer måste därför också ingå i ämnesteorin för att möjliggöra logiskt hållbara val i det ämnesdidaktiska steget.

7.4.1 Minustecknets innebörd

Vid arbete med negativa tal måste man ha klart för sig att minustecknet används i två helt olika betydelser.

- Dels använder man minustecknet för att beskriva en subtraktion såsom i 6 – 3. Observera samtidigt att subtraktion svarar mot åtminstone tre olika vardagliga betydelser: *Ta bort, lägga till* och *jämföra*. (Se t.ex. Carpenter m.fl., 1982, Kilborn, 1989 och Kilpatrick, 2001)
- Dels använder man minustecknet för att beskriva negativa tal, alltså tal som är mindre än noll. Ett tal som 5 har t.ex. en negativ motsvarighet i talet (-5). Relationen mellan dessa båda tal kan definieras genom att 5 + (-5) = 0. Observera att det på de flesta miniräknare finns ett speciellt minustecken för negativa tal. På tangenten kan det då stå t. ex. (-) eller (-x). Detta ger rika möjligheter till att i skolan laborera fram teckenreglerna vid arbete med negativa tal.

Eftersom negativa tal är vanligt förkommande vid ekvationslösning och inom funktionsläran, är det viktigt att de flesta elever lär sig behärska operationer som att addera, subtrahera, multiplicera och dividera negativa med tal. Dessa operationer måste vara så väl förankrade att man vid problemlösning inte hakar upp sig på grundläggande räkneoperationer och därmed tappar flyt i sitt räknande. Så här står det om negativa tal i kursplanen (Skolverket 2000a) under uppnåendemålen i skolår 9:

> Inom denna ram skall eleven - ha utvecklat sin taluppfattning till att omfatta hela tal och rationella tal i bråk- och decimalform. (s. 28)

Det står vidare att

> Strävan skall också vara att … förstå och använda - grundläggande talbegrepp och räkning med reella tal … (s. 27)

Detta kan tolkas så att alla elever skall ha en uppfattning om de negativa talens egenskaper och natur och att de om möjligt också skall kunna operera med negativa tal.

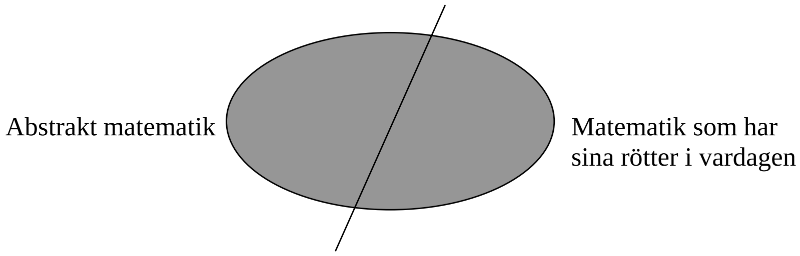
Enligt en tidigare (procedurellt inriktad) undervisningstradition lärde sig elever enkla regler för arbete med negativa tal såsom att "lika tecken ger plus" och "olika tecken ger minus" (oftast helt utan bakomliggande förståelse). I dagens skola vill man emellertid att en kunskap eller en regel av det här slaget skall grundas på någon form av förståelse. Detta kan ske på i huvudsak två sätt, genom anknytning till vardagserfarenheter och genom laborativt arbete. I båda fallen är det viktigt att det didaktiska språk som används dels är logiskt och entydigt i relation till det fenomen som studeras, dels låter sig transformeras till den terminologi som bör användas senare, när man nått det slutliga, formella målet.

När man bygger upp en ämnesdidaktisk teori bör man vara medveten om att det egentligen bara är tre operationer man har behov av att förklara när det gäller addition och subtraktion av negativa tal:

1. Att subtrahera så att resultatet blir ett negativt tal, såsom i 5 – 7. Man vill därvid visa att operationen leder till det negativa talet (-2).
2. Att addera ett negativt tal, såsom i 5 + (-2). Man vill då visa att resultatet blir detsamma som vid subtraktionen 5 – 2 = 3. Detta kan uttryckas som att "en addition av ett negativt tal kan ersättas av en subtraktion av det motsatta (positiva) talet". Samma idé kan därefter användas för att visa att (-5) + (-2) = (-7)
3. Att subtrahera ett negativt tal, såsom i 5 – (-2). Man vill i det här fallet visa att resultatet blir detsamma som vid additionen 5 + 2 = 7 (och att analogt (-5) – (-2) = (-5) + 2 = (-3)). Detta kan uttryckas som att "en subtraktion av ett negativt tal kan ersättas av en addition med det motsatta (positiva) talet. (Se t.ex. Kilborn, 1990 kapitel 8)

Det är i det här sammanhanget viktigt att uppmärksamma att alla matematiska operationer inte svarar mot en vardagshändelse utan att en del bygger på definitioner och räknelagar. Det är inte alla lärare som uppmärksammar det. I stället för att klargöra detta faktum för eleverna och visa på vilka spelregler som gäller, försöker många lärare konkretisera även sådant som inte är konkretiserbart – som inte har någon motsvarighet i vardagen. Dessa falska konkretiseringar eller falska metaforer leder oftare till att eleverna blir konfunderade än till att de får en konkret förankring av och förståelse för den operation man avser att konkretisera. Det kommer att ges en rad exempel på sådana situationer längre fram i det här kapitlet.

För att förklara det dilemma som kan uppstå i gränslandet mellan abstrakt och konkretiserbar (vardagsförankrad) matematik har Löwing & Kilborn (2002) använt följande illustration.



Man tänker sig här att det skuggade området omfattar all skolmatematik. Detta sönderfaller i sin tur i två halvor. Den högra halvan har sina rötter i vardagsmatematiken och låter sig därför konkretiseras. Den vänstra halvan består av en abstrakt matematik som inte låter sig konkretiseras, möjligen troliggöras eller stödjas med hjälp av lämpliga metaforer. En viktig del av en ämnesdidaktiska teori handlar om hur man balanserar dessa två områden. Genom användning av lämpliga analogier och metaforer kan man nämligen flytta skiljelinjen åt vänster och göra en större del av skolmatematiken tillgänglig för betydligt fler elever. Detta måste emellertid göras med stor urskiljning. Två andra stoffområden där skiljelinjen är speciellt känslig är, förutom negativa tal, bråkräkning och ekvationslösning. Med utgångspunkt från addition och subtraktion av negativa tal följer nu ett antal exempel på vad det här kan innebära.

7.4.2 Informella och vardagsanknutna förklaringar

När man skall förklara något komplicerat för eleverna försöker man ofta finna något i elevernas vardagserfarenheter som kan utnyttjas som förklaring till den matematiska modellen eller operationen. Det är därvid viktigt att den förklaring som ges (genom en konkretisering eller en metafor) är av ett sådant slag att den dels är matematiskt hållbar, dels kan rekonstrueras av eleverna längre fram, om de har glömt modellen eller hur man utför operationen.

Enligt en studie genomförd av Kilborn (1979b) är det två förklarings-modeller som dominerar, när man i skolan skall konkretisera operationer med negativa tal (genom vardagsförankring), *lån – skuld* och *termometern*. Tyvärr visar det sig att ingen av lärarna i Kilborns studie hade funnit någon logiskt hållbar förklaringsmodell (metafor) för arbete med de negativa talen. Här följer några exempel på hur kommunikationen i allmänhet såg ut.

Att låna pengar samt att ha och betala tillbaka en skuld är något som de flesta elever (speciell om man är vuxenstuderande som i den här refererade studien) har lätt att förstå. Om man tar detta som underlag för konkretisering måste man emellertid vara medveten om att man till vardagslag inte opererar med negativa tal i motsvarande situationer. Man använder i vardagslivet betydligt smartare och enklare metoder än så. Det gäller alltså att se upp med vad man faktiskt konkretiserar. Är det den vardagliga händelsen (metaforen) i sig man konkretiserar eller används händelsen (metaforen) för att lyfta fram en matematisk idé. I det förra fallet har man bara lotsat eleven förbi idén istället för att lyfta fram den. Ett annat viktigt krav är att man är konsekvent i sitt språk och sina ”liknelser” så att de operationer man beskriver blir entydiga och språket på sikt (vid behov) låter sig transformeras till ett formellt språk. Även detta har många lärare problem med, vilket framgår av Kilborns (1979b) studie.

- *Uppgiften är 7 – 9.*

Läraren: Det här - 9 betyder ju att man har en skuld. Man har 7 kr. Sedan ska man ju betala 9 kr, kan man ju säga. Ja, hur mycket har man kvar att betala?

Vad läraren avser att visa är hur man utför en subtraktion som ger ett negativt tal som svar, nämligen hur man drar 9 från 7. I det här fallet är emellertid talet 9 ett positivt tal och kan således inte betyda en skuld. En skuld skulle ha tecknats (-9). Detta är ett exempel på en falsk metafor. *Vi kan också konstatera att läraren inte har använt metaforen till att förklara ett matematisk sammanhang, utan enbart till att räkna fram ett svar. Hon har således arbetat* inom metaforen. *En mer korrekt metafor skulle vara att man <u>har</u> 7 kr och skall <u>betala</u> 9 kr. Pengarna räcker då inte utan man har 2 kr kvar att betala. Man får därför en skuld på 2 kr. Svaret blir således det negativa talet (-2).*

- *Uppgiften är (-5) – 3.*

  Läraren: Det är ju en skuld på 5 och sedan har vi en skuld på 3. Hur stor skuld har vi?

  Läraren beskriver i det här fallet både det negativa talet (-5) och det positiva talet 3 som skulder, vilket inte är logiskt. Talet 3 är ju positivt. Om det varit en skuld på 3 kr så skulle det ha stått (-3), vilket gett vardagshändelsen (-5) + (-3). Återigen är alltså metaforen *falsk*. För att ge en vardagsanknytning till den givna uppgiften (-5) – 3 vore det rimligare att utgå från att man redan har en skuld på 5 kr och därefter köper något som kostar 3 kr (utan att kunna betala). På det sättet ökar man sin skuld med 3 kr. Detta kan nu tolkas som (-5) – 3 = (-5) + (-3). Man har nu två skulder en på 5 och en på 3 kr. Detta ger tillsammans en skuld på 8 kr. Ett alternativ till detta är att utgå från (-5) kr och sedan låna ytterligare 3 kr, en krona i sänder, vilket skulle innebära att skulden ökar successivt till (-6) kr, (-7) kr och (-8) kr. Vi har nu en *sann metafor* och arbetet sker *via metaforen* eftersom man med dess hjälp förklarar ett matematiskt sammanhang.

- *Uppgiften är (-7) – (-5).*

  Läraren: Om jag är skyldig 7 kronor men slipper betala tillbaka dom där 5 kronorna, hur mycket är jag då skyldig?

  Här saknar läraren en adekvat förklaring och lotsar sig ur problematiken genom vad Kilborn kallar en ”semantisk lotsning”. Med det menas att han konstruerar ett vardagsproblem som inte hänger ihop med den givna uppgiften. Läraren använder alltså med vår terminologi en *falsk metafor* och arbetar samtidigt *inom metaforen*. Dilemmat med de falska meta-forerna är att om eleverna förstått metaforen i sig, alltså motsvarande vardagsproblem, så brukar både de och läraren vara nöjda och man går vidare. Problemet är emellertid att eleverna inte har kommit ett steg närmare det begrepp eller den operation läraren avsåg att förklara. I det här fallet accepterade eleverna inte vardagsproblemet varför läraren tvingades göra en ny semantisk lotsning: *Jag minskar min skuld, det är något positivt*.

Om man verkligen vill använda metaforen lån och skuld så skulle en mer korrekt vardagsanknytning vara att jämföra de två talen genom att utgå från två skulder. T.ex.: Jag har en skuld på 7 kr och du har en skuld på 5 kr. Hur mycket större är min skuld? Detta förutsätter emellertid att eleverna (och läraren) behärskar subtraktionstanken *jämföra*, alltså inser att uppgiften kan lösas genom att man söker <u>differensen</u> mellan två tal.

De här exemplen är enligt Kilborn typiska för hur de tre lärarna i studien beskriver, förklarar och opererar med negativa tal. Alla de tre lärarna i studien blandar på olika sätt samman det negativa talet med operationen subtraktion. De använder alltså *falska metaforer*. Vardagsförankringen ger därför inte någon förklaring till hur man opererar med negativa tal. Lärarnas avsikt verkar heller inte vara att utnyttja vardagsanknytningen för att förklara hur man opererar med negativa tal utan att komma fram till (lotsa fram) rätt svar på det aktuella problemet. Konkretiseringen har därmed förlorat det viktiga syftet att förklara eller troliggöra en matematisk operation. Lärarna har således arbetat *inom metaforen*.

Minusgrader är något annat som är bekant för de flesta svenska elever. Med hjälp av termometern kan de därför följa hur temperaturen förändras även om den går från plusgrader till minusgrader eller omvänt. Däremot är det tveksamt om alla skolelever verkligen uppfattar minusgrader *som negativa tal*. Det är nog snarare så att minusgrader uppfattas som vanliga tal (plustal) fast under 0 på termometerns skala. Om så är fallet saknar eleverna en viktig förbindelselänk mellan metafor och teori. Ett annat problem är att man, när man arbetar med något bekant såsom temperatur, ofta förväxlar arbetet med termometern med den matematiska operation som skall beskrivas med hjälp av temperatur. Detta är ännu ett exempel på arbete *inom metaforen* istället för *via metaforen*. Så här kan sådana konkretiseringar med hjälp av temperatur gå till enligt Kilborn (1979b):

- Uppgiften är 7 + (-9).
  Läraren: *Vad är summan av 7 plusgrader och 9 minusgrader*.

Den här frågeställningen dyker upp hos två av de tre lärarna. Frågeställningen är emellertid något vansklig. Vad menas med att addera två temperaturer och vad menas i så fall med temperatur. Kilborn kallar denna typ av falsk metafor för *rövarhistoria*. Med detta menas att läraren utgår från något som är så bekant för eleverna (i det här fallet temperatur) att de accepterar metaforen utan att reflektera över om kopplingen till uppgiften är relevant. Perceptionen riktas alltså mot fel fokus. Tekniken används enligt Kilborn av lärare för att lotsa sig ur en situation till vilken de saknar en relevant förklaring. Lika felaktigt blir det när de här lärarna drar en temperatur från en annan (istället för att beräkna differensen). Vad man däremot skulle kunna använda termometern till är att räkna ut en medeltemperatur eller en temperaturskillnad, givetvis under förutsättning att detta ger en relevant illustration eller förklaring till en given matematisk operation.

- *Uppgiften är 5 – (-2)*
  Läraren: Vi har temperaturen 5 grader och sedan har vi temperaturen (-2) grader. Så ska vi se hur stor temperaturskillnaden är. Hur stor är temperaturskillnaden?

  Eleven: *Minus 7.*
  Läraren: *Där har vi nollan, där har vi 5:an och där har vi (-2). Hur stor är skillnaden?*
  Eleven: *7 grader …*
  Läraren: *Ja, så har vi sett att istället för – (-) så får vi plus.*

Flera elever uttrycker sin förvåning och sin förtjusning: *Men Gud!* är en, *Och positivt!* är en annan spontan elevkommentarer. Men varför blev det egentligen 7 och inte (-7) och hur kan man av enbart det här exemplet dra slutsatsen "att istället för –(-) får vi +"? När man studerar resten av den här lektionen, och även den följande lektionen, så undrar man vad eleverna egentligen har förstått. Sannolikt har de förstått att avståndet mellan de två temperaturangivelserna är 7 grader (eller är det (-7) grader?). Men frågan är om de har förstått kopplingen mellan detta och att – (-) är lika med +? Problemet är nämligen att de flesta av eleverna i den här gruppen sannolikt uppfattar subtraktion som *ta bort* inte som *differensen* mellan två tal. Det betyder att de knappast kan ha uppfattat kopplingen mellan subtraktionen 5 – (-2) (alltså att man enligt deras uppfattning skall ta bort (-2)) och avståndet på termometern där de beräknar en differens mellan två tal. Eleverna har i så fall snarare lotsats fram till en lösning på termometern än till att förstå en räkneregel för hur man löser den givna uppgiften 5 – (-2).

Man kan sammanfatta detta så att termometern mycket väl kan användas som metafor för att konkretisera en differens mellan två tal såsom 5 – (-2) eller (-2) – (-11). Detta förutsätter emellertid att eleverna kan uppfatta subtraktionen som differensen mellan talen, t. ex. som avståndet mellan två tal på en tallinje. Vi återkommer till detta senare i samband med tallinjen. Det mest anmärkningsvärda med den här studien är att alla de studerade lärarna använde sig av *falska metaforer* och arbetade *inom metaforerna* trots att de alla hade minst 2 betyg i matematik (motsvarande 40 poäng). Deras ämnesteoretiska kunskaper räckte ändå inte till för att förklara skolans matematik. De hade behövt en ämnesdidaktisk teori, som stöd för val av metaforer och för att kunna hjälpa eleverna att utveckla matematisk kompetens och lämpliga matematiska redskap.

> Vi lever i vad som benämns på olika sätt - ett postindustriellt eller postmodernt kunskapssamhälle. … I ett sådant samhälle är skolans uppgift inte att tillhandahålla information i första hand, snarare att utveckla redskap och kompetenser för att kunna hantera och värdera information. (Carlgren & Marton, 2000 s. 190)

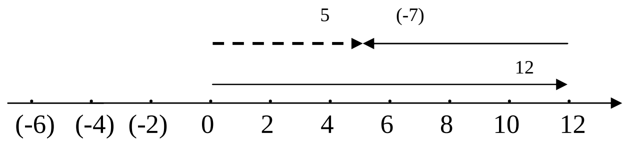
7.4.3 Tallinjen och ett laborativt arbetssätt

Det som är kännetecknande för en laborativ förklaring är att man bygger upp en modell av den teori som skall beskrivas. Avsikten med laboration är emellertid inte aktiviteten i sig utan att aktiviteten skall leda eleverna mot ett avsett mål. En laborativ metod kräver därför ett klart språk för såväl de föremål som används som för de handingar som utförs. Ett problem kan därvid vara hur man efter hand transformerar detta laborativa språk till det formella språk som används inom den teori man avser att förklara. I boken *Matematik 1. Mängder, funktioner och tal* ger Karl Greger (1971) ett exempel på ett "spel" som metafor för arbete med negativa tal. Ett annat exempel är det "spel" som Kilborn presenterar i Häggström m.fl. (1994). I båda fallen handlar det om att laborera med vita och svarta klossar (representerande positiva respektive negativa tal). En poäng med de här typen av laborativt arbete är att de utförs som spel med bestämda spelregler på samma sätt som man kan uppfatta den mer formella matematiken som ett spel med bestämda regler. Ju närmare matematikens spelregler man kommer, desto klarare belyser man genom laborationen de matematiska operationer som skall konkretiseras. Syftet med dessa spel är att de skall bygga på strukturer som är så lika den matematiska modellens strukturer att laborationen kan bli ett stöd för det abstrakta tänkandet. Den vanligaste laborativa förklaringen av negativa tal är emellertid inte spel utan tallinjen, en s.k. *strukturell metafor* enligt Pimms terminologi.

Tallinjen brukar användas av lärare för två olika syften, dels som laborativ modell för att förstå addition och subtraktion av negativa tal (alltså för arbete *via metaforen*), dels som ”räknehjälpmedel” för att lösa uppgifter med hjälp av tallinjen (dvs. arbete *inom metaforen*). Tyvärr blandar lärare ofta samman dessa två syften, vilket vållar problem för eleverna. Lärarna i Kilborns studie har dessutom problem med terminologin som oftast är mycket svävande. De skiljer inte heller mellan att beskriva tal med pilar (vektorer), att addera eller subtrahera pilar och att ”gå” fram eller tillbaka på tallinjen. Här följer några typiska exempel på hur tallinjen användes av de tre lärarna i studien:

- Uppgiften är 12 + (-7).
  Läraren: *Sen ska vi addera ett negativt tal. Och ett negativt tal var ju riktningen till vänster. Vi får alltså ta sju steg tillbaka.*

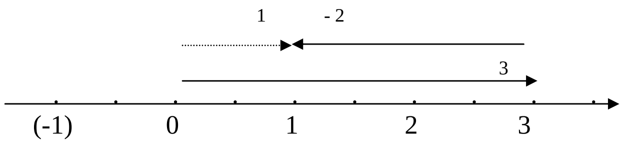
Vad läraren avser att göra är en addition på tallinjen. En sådan addition ser enligt läroboken ut så här och det är också vad läraren ritar på tavlan.



Man adderar alltså två vektorer och ”resultanten” blir en pil från 0 till 5. Vad läraren i själva verket säger till eleverna är något helt annat. Hon ”tar sju steg till vänster" på tallinjen, från 12 till 5, vilket svarar mot en nedräkning 11, 10, 9, 8, 7 , 6, 5. Hon gör således inte en addition med (-7) utan en subtraktion med 7. Metaforen är alltså falsk.

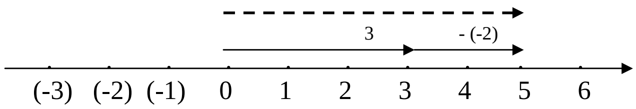
- Uppgiften är 3 – 2.
  Läraren: *Börja med en 3-pil från 0 till 3. Sedan skall du subtrahera med 2. Låt en 2-pil börja där 3-pilen slutar. 2-pilen är vänd åt vänster eftersom du subtraherar. …*

Så här beskriver läraren uppgiften på tavlan:



Genom att jämföra hur läraren uttrycker sig här och i det föregående exemplet, får man en uppfattning om hur ett stort och allvarligt problem uppstår. Talet (-7) var ju riktningen till vänster och vid subtraktion av det positiva talet 2 var pilen vänd åt vänster. Dessa två uttryck är snarlika och används senare av alla lärarna synonymt trots att de representerar två väsenskilda saker, i det förra fallet skall man addera det negativa talet (-7), i det senare fallet skall man subtrahera det positiva talet 2. Det man på det här sättet stillatigande förutsätter är i själva verket vad man avser att bevisa (eller troliggöra) nämligen att 12 + (-7) = 12 - 7 och att 3 - 2 = 3 + (-2).

- Uppgiften är 3 – (-2).
  Läraren: Du startar med att rita en 3-pil från 0 till 3. Sedan ska du subtrahera med (-2). En (-2)-pil går åt vänster, men eftersom du subtraherar med (-2) ska du vända pilen åt motsatt håll, alltså åt höger.



Observera att den illustration man nu använder är exakt densamma som när man skall utföra additionen 3 + 2 = 5. Någon förklaring till varför en subtraktion av ett negativt tal kan ersättas av en addition av det motsatta (positiva) talet ger läraren inte. Hon bara vänder pilen och vänder den sedan igen. Men varför då? Är det inte just detta som skall förklaras? En av de andra lärarna löser samma uppgift på följande sätt:

- Uppgiften är 3 - (-2). (Läraren löser först uppgiften 3 – 2 som förberedelse)
  Läraren: *Jaha, 3 – 2 är detsamma om 3 + (-2). Just det. Observera att det var egentligen en plus 2-pil. Men eftersom vi hade subtraktion skall vi vara lite mittemot. Ni vet att är man negativ, så är man lite mittemot.*
  …
  Om vi tar 3 – (-2) då? … Den är ju ännu mera mittemot ja. …. Om vi bara tänker på (-2) pilen nu. Hur ska den ritas? …Åt vänster, ja. Så egentligen skulle (-2) pilen gå så här. … Men nu har vi subtraktion. Hur vänder vi den nu? …

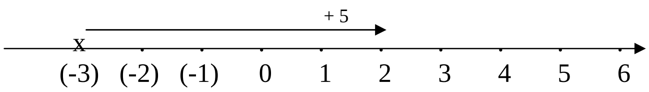
Till att börja med tar den här läraren för givet att 3 – 2 och 3 + (-2) är samma sak och bygger därmed upp en falsk metafor. Hans förklaring till subtraktionen 3 – (-2) är att subtraktion är *ännu mer mittemot* än ett negativt tal vilket är ett nytt exempel på semantisk lotsning. Det är inte konstigt att eleverna blir förvirrade. Detta är vad som händer några minuter senare:

- Uppgiften är 5 – (-2*).*
  Läraren: *Och det här är alltså svårt eftersom här är tallinjen inte bra Därför att här säger dom då … Man har 5 och då går man alltså från 0 till 5. Sedan har man – (-2). Ja man står där från början. Minus skulle ju vara till vänster, men eftersom man har – (-) så går man till höger.*
  Elev*: Till höger !!*
  Läraren*: Ja, det finns ju ingen logik …*

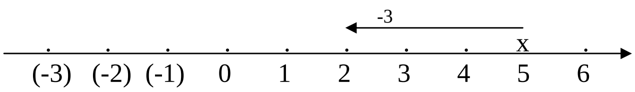
Läraren som inte har någon hållbar förklaring till detta och tvingas nu ge upp. Problemet, som den här läraren delar med de övriga lärarna i studien, är att de inte behärskar någon ämnesdidaktisk teori. De inser inte heller hur de kan använda de kunskaper om räkning med vektorer som de borde ha inhämtat under sin grundutbildning i matematik. Av dessa skäl misslyckas lärarna med att förklara de mest grundläggande begreppen vid subtraktion av negativa tal, alltså skillnaden mellan ett negativt tal och räkneoperationen subtraktion.

7.4.4 En alternativ användning av tallinjen

Om man istället studerar tallinjen såsom den beskrivs i Kilborn (1990), så får man en helt annan uppfattning om hur man kan arbeta utgående från tallinjen. Först och främst finner vi då att tal som 2 och (-2) har en plats på tallinjen, medan en addition med 2 flyttar ett tals position två steg åt höger och en subtraktion med 2 flyttar ett tals position två steg åt vänster. Det blir mot denna bakgrund naturligt att uppfatta additionen (-3) + 5 som



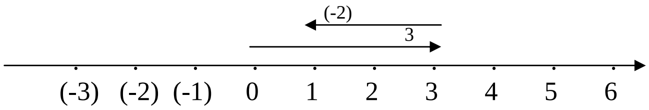
Man utgår alltså från det givna talet (-3) och adderar 5 genom att flytta talets position 5 steg åt höger. Svaret 2 finner man vid pilens spets. Subtraktionen 5 – 3 kommer då att se ut så här:



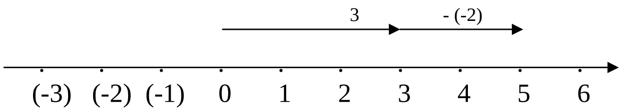
Att addera ett negativt tal såsom i operationen 5 + (-3) blir något svårare och i det fallet är inte tallinjen en lika bra metafor. (Observera att vi inte accepterar "rövarhistorien" att om man tar 3 steg baklängas så går man framåt!) I det här fallet är det betydligt lättare att dela upp 5 i 2 + 3. Eftersom 3 och (-3) är motsatta tal och därmed 3 + (-3) = 0, så får vi direkt 5 + (-3) = 2 + 3 + (-3) = 2 + 0 = 2. (En god metafor för detta är att betala tillbaka en skuld på 3 kr. Man betalar då skulden med 3 av de 5 kronor man har och det blir 2 kr över.) Det finns således inte något behov av tallinjen som metafor i det här fallet.

För att undvika missuppfattningar är det nu viktigt att klargöra målet med att använda en metafor eller att verklighetsförankra ett ämnesinnehåll. Utgångspunkten för de ovan utförda analyserna är att man avser att använda tallinjen som metafor för att förklara de regler som gäller för addition och subtraktion av negativa tal. Syftet är alltså att arbeta *med hjälp av metaforen* tills reglerna är etablerade varefter eleverna kan och bör arbeta formellt. Om målet istället hade varit att arbeta *inom metaforen*, dvs. att konsekvent översätta varje addition eller subtraktion av ett negativt tal till tallinjen, så skulle man ha utgått från en helt annan struktur och då hade resonemanget blivit ett helt annat än det som just redovisats. Samtidigt kan man fråga sig vad som skulle vara den långsiktiga poängen med att arbeta inom metaforen.

Så här långt är allt väl. Det verkliga problemet brukar uppstå när man skall subtrahera ett negativt tal och inte skiljer på de två minustecknens innebörd. Subtraktionen 3 – (-2) brukar då (i de flesta läroböcker) beskrivas i två steg. Först tar man 3 + (-2) och konstaterar att (-2)-pilen är vänd åt vänster.



Eftersom man nu skall subtrahera (-2) skall pilen, menar man, vändas en gång till. Man får då resultatet:



Förklaring till varför man skall vända pilen två gånger är emellertid inte så lätt att förstå. Det är i själva verket den operationen man skall förklara med hjälp av tallinjen!

Från de tidigare exemplen kan man också lägga märke till "förklaringar" som

Minus skulle ju vara till vänster, men eftersom man har – (-) så går man till höger.

och

Ni vet att är man negativ, så är man lite mittemot

Lärarna i Kilborns studie försöker uppenbarligen att med listiga ordvändningar förklara något som de sannolikt själva inte har gjort klart för sig och som de själva heller inte tror på. Alla tre lärarna kör också fast när de blir pressade av eleverna. En av lärarna erkänner att "Det är ologiskt!" en annan lägger skulden på eleverna: "Ja, men vad besvärliga ni blir plötsligt!"

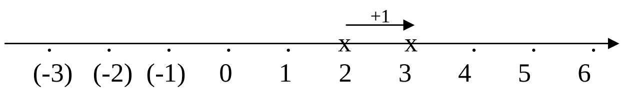
I kursplanens (Skolverket 2000a) krav för bedömning av elevernas kunnande i matematik kan man läsa att man skall bedöma följande kvaliteter:

> Förmågan att använda, utveckla och uttrycka kunskaper i matematik …
> Förmågan att följa, förstå och pröva matematiska resonemang…
> Förmågan att reflektera över matematikens betydelse för kultur- och samhällsliv. (s. 29, 20)

Vilka av dessa kriterier är uppfyllda under de lektioner som skildras i Kilborns (1979b) studie? Och hur skall eleverna kunna utveckla dessa förmågor om deras lärare, såsom i den här studien, själva inte ens har antagit ett lärandeperspektiv, än mindre ett lärarperspektiv.

För att undvika de ovan beskrivna problemen föreslår Kilborn (1990) följande modell för subtraktion av negativa tal och utgår därvid från att subtraktion kan anta flera olika ansikten. När man i en vardagssituation söker svaret på uppgiften 3 – 2 är det inte alltid frågan att dra 2 från 3. Det är lika troligt att man avser differensen mellan 2 och 3, t. ex. hur mycket som fattas om man har 2 kr och behöver 3 kr.

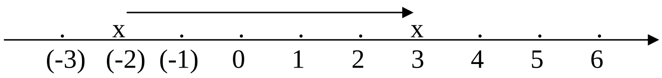
Det här betyder att en subtraktion som 3 – 2 kan tolkas så här, nämligen som avståndet från 2 till 3 på tallinjen:



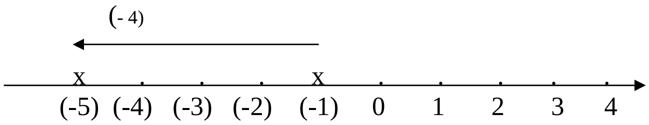
Svaret är pilen 1. Observera att det här är en operation som är mycket vanlig redan under skolår 1. Man beskriver då ofta subtraktioner som 3 – 2 med hjälp av en öppen additionsutsaga 2 + __ = 3. Det betyder att en sådan här operation inte är ny för eleverna om de haft en förutseende lärare under skolår 1. Detta visar samtidigt på vikten av kontinuitet i undervisningen något som måste vara en röd tråd i en ämnesdidaktisk teori.

Nu använder Kilborn samma strategi för att lösa en mer komplicerad uppgift som 3 – (-2). Man kan alltså nu fråga efter differensen mellan de två talen eller vilket tal (vilken pil på tallinjen) man skall addera till (-2) för att få (komma till) 3. Observera att det är så här man i själva verket gör när man i vardagssammanhang skall bestämma temperaturskillnader på en termometer.

+ 5

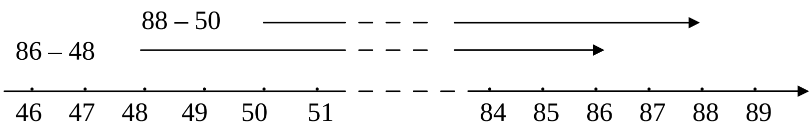


Eftersom pilen (förflyttningen från (-2) till 3) är 5 enheter lång och riktad åt höger så är differensen 3 – (-2) = 5. På motsvarande sätt kan subtraktionen (- 5) – (-1) illustreras som det tal (den pil) man skall addera till (-1) för att få (komma till) (-5). Detta är en operation som svarar mot den öppna additionsutsagan (-1) + __ = (-5).

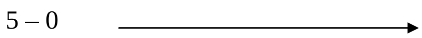


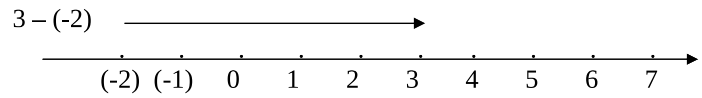
Den här pilen svarar mot talet (-4). Således är (-1) + (-4) = (-5) vilket är ekvivalent med att (-5) – (-1) = (-4). Det här innebär att man mycket väl kan använda sig av tallinjen som metafor utan att blanda samman negativa tal och räkneoperationen subtraktion. Om man känner till den här typen av äkta metafor så har man inte längre något behov av den tvivelaktiga operationen som ”vända-vända”.

För den som behärskar en ämnesdidaktisk teori finns det ännu fler möjligheter. När man utför en subtraktion som 3 – (-2) kan t.ex. använda en metod som är vanlig när man skall utföra subtraktionen 86 – 48 i huvudet. Genom att addera samma tal, i det här fallet talet 2, till båda termerna så får man 88 – 50, dvs. en subtraktionen som är betydligt enklare att hantera i huvudet. (Se vidare i Löwing & Kilborn 2003.) Vad som händer kan lätt illustreras på tallinjen. Man flyttar (transformera) bara hela operationen 86 – 48 två steg åt höger, men differensen blir densamma.



Subtraktionen 3 – (-2) kan utföras med exakt samma teknik genom att man adderar 2 till båda termerna. Man får då den betydligt enklare subtraktionen (3 + 2) – [(-2) + 2] = 5 – 0.





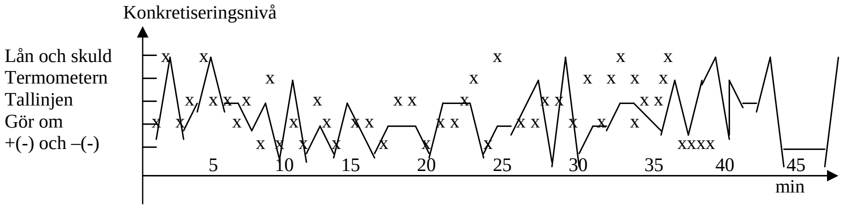
Vad Kilborn hela tiden understryker är vikten av att man vid konkretisering söker den underliggande algebraiska strukturen och försöker förklara den. Han understryker också vikten av att de strategier som används under tidigare skolår skall ha en sådan kvalitet att de låter sig användas (direkt eller efter en modifiering) även under senare skolår. Vad han vänder sig mot är fiffiga metoder som ger rätt svar för stunden men inte harmonierar med övriga matematiska modeller. Detta menar han kommer alltid att straffa sig på sikt. Det här är ett synsätt som bör genomsyra en ämnesdidaktisk teori.

När man använder sig av metaforer, så är det viktigt att göra klart för sig vad som är syftet och på vilken nivå man avser att lägga undervisningen. I vissa fall kanske man är nöjd med att troliggöra ett begrepp eller hur man utför en operation. I andra fall vill man använda metaforen att bygga vidare på, för att ha som konkretiserande bakgrund i ett senare teoretisk resonemang. I vilket fall som helst är det viktigt att man väljer en äkta metafor.

7.4.5 Formellt arbetssätt

När man bearbetar ett matematiskt problem är det viktigt att man har ett effektivt språk för det man gör. Detta gäller inte bara vid kommunikation med elever utan även när man som lärare i samverkan med kolleger diskuterar hur man kan förklarar något eller hur man kan lösa ett problem. Detta är inte minst viktigt om samverkan sker över ämnesgränser eller stadiegränser. Ett dilemma med ämnet matematik är härvidlag att man använder sig av ett stort antal ämnesspecifika termer, uttryck och metoder. I avsikt att underlätta för eleverna att tränga in i den här världen strävar man i dagens skola efter att göra undervisningen konkret, åtminstone när man introducerar ett nytt område. När eleverna kommer till högstadiet och gymnasiet blir det emellertid svårare för dem att klara sig utan speciella matematiska termer och metoder. Det är därför viktigt att den konkretisering som görs i skolan verkligen knyts samman med den mer formella matematiken. I annat fall har ju konkretiseringen missat ett viktigt syfte. Denna språkliga och begreppsmässiga knytning av begrepp på olika nivåer kräver goda kunskaper inom en ämnesdidaktisk teori.

För att eleverna skall kunna tillgodogöra sig poängerna med en konkretisering (eller en metafor), så är det viktigt dels att läraren har klart för sig vad som skall konkretiseras, dels vad som är målet med konkretiseringen. På den punkten har lärarna i Kilborns (1979b) studie av negativa tal stora problem och man finner liknande problem bland lärarna i Löwings (2004) forskning. I Kilborns studie finner man också ett antal diagram över hur de olika lärarna konkretiserar undervisningen och hur de i sin kommunikation i klassummet pendlar mellan konkret och abstrakt förklaring. Följande diagram beskriver en av de tre lärarnas lektioner. I diagrammet är första-axeln en tidsaxel medan andra-axeln beskriver följande fem konkretiseringsnivåer: Lån och skuld, Termometern, Tallinjen, Gör om (t.ex. 7 + (-5) till 7 - 5 utan förklaring) samt + (-) ger minus och - (-) ger plus. I diagrammet kan man, minut för minut, följa vilken konkretiseringsnivå läraren väljer under olika skeden av lektion 1.



Med tanke på vad som är poängen med att konkretisera, så skulle man i diagrammet förvänta sig att en upptrappning av abstraktionsnivån från konkret till mer och mer abstrakt. Om läraren hade haft en plan för vart konkretiseringen syftar så borde man kunna se detta i diagrammet. Det som framgår av diagrammet är istället att läraren inte har någon plan utan istället improviserar och väljer den konkretiseringsmodell som verkar passa för stunden.

De övriga diagrammen i rapporten visar att de två andra lärarna agerar på samma sätt. När Kilborn på motsvarande sätt analyserade de följande lektionerna i respektive klass, så hoppades han finna att eleverna nu hade konsoliderat sina kunskaper och att lärare och elever övergått till att arbeta mer och mer formellt. Det är ju det som är poängen med konkretisering och metaforer. I själva verket såg lektionerna fortfarande ut på samma sätt. Löwings (2004) forskning tyder på att situationen är densamma idag, efter drygt 20 år.

Det man kan konstatera i Kilborns studie är att det formellt beskrivande språket (se även Löwing 2000 och 2001) förkommer mycket sällan i undervisningen, inte ens mot slutet av den andra lektionen. Orsaken är att eleverna inte hänger med eftersom de inte förstår de operationer som utförs och att de inte kan knyta den konkretisering och de metaforer som ges till avsedd kunskap. Ingen av de tre lärarna utnyttjar t.ex. det som är matematiskt intressant och grundläggande nämligen att varje negativt talet är ett motsatt tal till ett positivt tal. (-3) är t.ex. det motsatta talet till 3 vilket innebär att 3 + (-3) = 0. Om man använder denna grundläggande definition, så leder t.ex. både Gregers och Kilborns laborationer (spel) till följande enkla regler:

- Addition av ett (negativt) tal kan ersättas med en subtraktion av det motsatta talet. Exempel: 3 + (-2) = 3 – 2.
- Subtraktion av ett (negativt) tal kan ersättas med en addition av det motsatta talet. Exempel: 3 – (-2) = 3 + 2.

Genom att använda sig av "huvudräkningsregeln" lika tillägg så kan man i det senare fallet även addera 2 till båda termerna vilket ger 3 – (-2) = 3 + 2 – [(-2) + 2] = 5 – 0 = 0.

Ingen av lärarna använde sig av något liknande i sin undervisning. Man får intrycket att de här lärarna har svårt att knyta samman dels den matematik de en gång själva studerat med den matematik de skall undervisa om, dels att koordinera den matematik de nu undervisar om med den matematik eleverna tidigare har inhämtat. De negativa talen har därmed, för eleverna, blivit en egen isolerad (och oförståelig) värld, inte en logisk utveckling av de naturliga talen med bibehållande av räknelagar och räkneregler.

För den elev som behärskar den ovan beskrivna tekniken med motsatta tal, är det möjligt att utföra alla subtraktioner av negativa tal som förekommer i skolan. De har därmed fått ett effektivt verktyg för att hantera de negativa talen. Frågan är nu om detta är tillräckligt och i så fall för vem. Man har ju inte bevisat de två reglerna ovan även om man i varje enskilt fall kan konstatera att de gäller. Vi har därmed kommit in på en mycket vikig fråga inom skolmatematiken nämligen hur långt man kan driva matematikerns stringenskrav. Ett intressant inlägg i den diskussionen finns i boken *Fermats gåta* (Singh, 1997). Man diskuterar där matematikens och övriga vetenskapers uppfattning om vad som är ett bevis:

> Skillnaden mellan det vetenskapliga och det matematiska beviset är både djupsinnig och subtil …Matematiska bevis är absoluta. För att riktigt kunna värdesätta dem bör vi jämföra dem med deras fattiga släktingar, de vetenskapliga bevisen. Inom vetenskapen framställer man en hypotes för att förklara ett fysikaliskt fenomen. Om observationerna av fenomenet i fråga överensstämmer med hypotesen vittnar det till dennas fördel … Till slut blir det en så övertygande mängd vittnesbörd att hypotesen godtas som en vetenskaplig teori. (s. 42, 43)

Med anledning av vad Sing här skriver kan det vara rimligt att ställa frågan varför man skall ställa större krav på skolbarn vad gäller bevis än man ställer på vetenskapen i övrigt. Kilborn ger som alternativ något som han kallar för pre-bevis. Med detta menar han i princip det som skulle kunna kallas vetenskapligt bevis. Om man t.ex. vill bevisa att subtraktion av ett (negativt) tal kan ersättas med en addition av det motsatta talet, dvs. att a - (-b) = a + b gäller för alla naturliga tal a och b, så kan man börja med att studera uppgifter av typen 3 – (-2). Genom att göra ett lika tillägg av 2 till båda termerna finner man att 3 – (-2) = [3 + 2] – [(-2) + 2] = 3 + 2 + 0 = 3 + 2. Genom att upprepa detta för några andra tal finner man förhoppningsvis ett mönster. Detta kallar Kilborn för pre-bevis (se även Kilborn, 1990). Poängen med pre-beviset är alltså att det gör en regel (eller ett matematisk sammanhang) trolig(t). Samtidigt har man emellertid lyft fram en teknik för hur man kan utföra ett mer formellt bevis. När man förstått tekniken kan man byta ut 3 mot a och 2 mot b och upprepa samma procedur en gång till. Man får då det mer generellt giltiga beviset a – (-b) = [a + b] – [(-b) + b] = a + b + 0 = a + b.

En intressant fördel med den just beskrivna tekniken är att den kan användas som modell för fördjupningsindividualisering av undervisnigen Vissa elever kan därvid nöja sig med pre-beviset medan de mer intresserade eleverna kan fortsätta och studera det mer formella steget.

En rimlig tolkning av Kilborns studie är att de tre lärarna inte behärskar någon didaktiskt hållbar teori för de negativa talens egenskaper eller för hur man kan operera med dem, detta trots att de alla har minst 2 betyg (motsvarande 40 poäng) i matematik. Denna tolkning bekräftas av de uppföljande intervjuer som i studien utfördes med 13 högstadielärare. Det visade sig att ingen av dessa lärare ansåg sig ha mött någon relevant teori för hur man adderar och subtraherar negativa tal, under sin utbildning. En av de tillfrågade lärarna ville inte ställa upp på intervjun och han motiverade sitt ”avhopp” på följande sätt: *”När jag på det här sättet tvingas tänka igenom hur jag egentligen uppfattar arbetet med negativa tal, så inser jag att jag faktiskt inte behärskar dess metodik.”* (Kilborn, 1979b s. 5) Han som uttalar sig så här var den teoretiskt mest kunnige av alla lärarna och doktorand i ämnet matematik.

8. Vad vet vi idag – och hur går vi vidare?

I det här kapitlet sammanfattas och kommenteras de viktigaste delarna i de förgående kapitlen: från vikten av att kunna ta ett lärarperspektiv till behovet av en fortsatt utveckling av en ämnesdidaktisk teori. Att lärare behöver en sådan teori för att kunna hjälpa eleverna att nå målen med undervisningen framgår inte minst av en artikel i Dagens Nyheter skriven av skolrådet på Skolverket, Ragnar Eliasson (2002). Han menar att samtidigt som vi har stora problem i skolan och det är stora skillnader mellan hur olika skolor fungerar, så finns det faktiskt skolor som lyckas väl:

> Skolor som lyckas förbättra sin måluppfyllelse kännetecknas av att det råder en samsyn på skolan om hur man skall arbeta och vad man prioriterar … Man är också tydlig när det gäller målen och noggrann med att följa upp varje elevs utveckling … Lärarna har höga förväntningar på eleverna, också på dem som har svårigheter. … Man använder tester och diagnoser men har insikt i att det är den pedagogiska kvaliteten … som är allra viktigast.

För att kunna arbeta så här krävs det en stor medvetenhet bland lärarna och en klar teori utgående från vilken man kan samarbeta och fatta de viktiga beslut som nämns i artikeln. Det måste därför finnas en "karta" över möjliga ämnesdidaktiska vägval sådan att läraren med dess hjälp kan planera olika elevers lärande utgående från deras respektive förkunskaper, ambitioner och intressen.

8.1 Behovet av en ämnesdidaktisk teori

Den nya lärarutbildningen kräver enligt Utbildningsutskottets betänkande (2000/01:UbU3) "en stärkt och breddad vetenskaplig bas för lärarutbildningen med relevans för den pedagogiska yrkesutbildningen (s.14). Vid Göteborgs universitet har det sedan 1970-talet utvecklats en ämnesdidaktiskt kunnande med inriktning mot matematik och naturvetenskaliga ämnen. Detta kunnande har sedan länge varit ett kännetecken för MaNO-lärarutbildningen i Göteborg. Som en (i Sverige) ung vetenskap har emellertid ämnesdidaktiken ännu svårigheter med att bli erkänd inom övriga delar av universitetet. Mogens Niss (2001) menar att det hänger ihop med ämnesdidaktikens karaktär:

> Det framgår att matematikens didaktik i flera avseenden kan jämföras med medicinen, som rymmer samma dualitet mellan en beskrivande/förklarande och en normativ dimension och som dessutom innehåller ett likartat spektrum när det gäller mål, syfte, metoder och aktiviteter. Men med bara trettio eller fyrtio år på nacken kan matematikens didaktik emellertid inte anses vara ett välutvecklat och utbyggt ämnesområde på samma sätt som den medicinska vetenskapen är. (s. 26)

Med tanke på vad Niss skriver och det begränsade stöd som hittills getts åt ämnesdidaktiskt forsknings- och utvecklingsarbete kommer det sannolikt att ta lång tid att utveckla ämnet. Mot detta kan man ställa frågan om inte den akademiska matematikteorin är tillräcklig för en lärare. Svaret på den frågan är nej. Den matematik som studeras på en institution för matematik gör kanske den studerande till en god matematiker men det som krävs av en god lärare i matematik är (dessutom) något helt annat nämligen ett lärar-perspektiv på skolämnet matematik. Ett sådant lärarperspektiv uppstår inte, vilket påpekas av Ball & Bass (2000), av sig självt eller som en följd av praktisk erfarenhet.

Undervisningssituationen i svensk skola har enligt Grevholm (1993) och NCM (2001) lett till en kris inom ämnet matematik vilken spritt sig till andra av matematikämnet beroende ämnen. Denna kris omfattar alla stadier - även högskolor och universitet. I Sverige har vi tidigare försökt lösa kriser i ämnet matematik med hjälp av utländska, främst amerikanska förebilder. Detta är kanske inte den lösning som passar bäst i dagens situation med tanke på att kvalitén på den amerikanska matematikutbildningen allvarligt ifrågasätts av amerikanerna själva. (Se t.ex. Stevenson & Stigler, 1992, Stigler & Hiebert, 1999 och Ma, 1999) Det vore sannolikt klokare att satsa, bygga vidare på och vidareutveckla de kunskaper vi redan har i landet. Den USA-inspirerade "Nya matematiken" och det misslyckade bytet av divisionsuppställning borde ha lärt oss svenskar det vanskliga i att oreflekterat importera en främmande kultur i vårt utbildningssystem.

Ett stort problem inom dagens skolmatematik är enligt NCM (2001 s. 130) ett stort läromedelsberoende i kombination med "en stor andel enskild räkning" samt att lärarna slutat undervisa och enbart fungerar som handledare (Madsén 2002). Man kan tolka detta så, att lärarna hittills i sin utbildning har saknat en adekvat teoribakgrund med vars hjälp de kan bygga upp och strukturera sin undervisning. Matematikdidaktikens viktiga vad- och hur-frågor kan inte byggas upp från ett intellektuellt vacuum. De kan heller inte härledas från en ämnesteori som är avsedd för akademikers arbete med vetenskapen matematik. Det här är något som lyfts fram i en rad böcker och artiklar. (T.ex. Ball & Bass, 2000, Kanes & Nisbet, 1996, Leinhart m.fl.1991, Schulman 1986, 1987 och Simon, 1993.) Samma problem lyfts fram av bl.a. Kilpatrik m.fl (2001). För att ge svar på ämnesdidaktikens vad- och hur-frågor krävs en ämnesteori som möjliggör ett <u>val av ämnesinnehåll</u> (och därmed av didaktik) utgående från skolans behov. I annat fall blir det ett alltför stort gap mellan den i skolan "utlärda" matematiken och elevernas vardagsförställningar om matematik. Det som krävs är således en teori som beskriver ämnesinnehållet på ett sådant sätt att den enligt Andersson (2002) är förståelig för eleverna och bättre än deras vardagsföreställningar. Avsaknaden av en relevant skolämnesteori leder också till, vilket vi gett en rad exempel på, att lärare tvingas ta till procedurella lösningar, falska metaforer och lotsning av eleverna.

Den amerikanska litteraturen pekar också på ett annat allvarligt problem nämligen att ett antal olika institutioner "kör var sitt race" inom lärarutbildningen oberoende av varandra och att det saknas samordning:

> The implications for teacher preparation and professional development are that teachers need to aquire these forms of knowledge in ways that forge connections between them. For teachers who have already achieved some mathematical proficiency, separate courses of professional development programs that focus exclusively on mathematics, on psychology of learning, or on methods of teaching provide limited opportunities to make these connections. Unfortunately, most university teacher preparation programs offer separate courses in mathematics, psychology, and methods of teaching that are taught in different departments. The difficulty of integrating such courses is compounded when they are located in different administrative units (Kilpatrick, 2001 s. 381).

Samma problem finns i Sverige och vid lärarutbildningen i Göteborg. Det som saknas är en samordning av olika, varandra kompletterande, teorier för matematikundervisning. En sådan samordning kan genomföras under förutsättning att vi inom universitetet visar ömsesidig respekt och förståelse för varandras kunskaper och erfarenheter. Om inte detta sker kommer det att uppstå problem med att bygga upp en meningsfull yrkesutbildning för matematiklärare.

Man måste som lärarutbildare hela tiden vara medveten om de stora krav som ställs på de lärare som undervisar i matematik i dagens skola. Under varje lektion utsätts de för frågor från elever med olika förkunskaper, med olika krav och med olika förmåga att förstå. Läraren skall vid varje sådant tillfälle kunna ge ett genomtänkt och långsiktigt hållbart svar på respektive elevs fråga. Det krävs då mer kunskaper än att bara vara duktig i matematik, något som åtskilligare lärare med goda kunskaper i matematik har vittnat om.

Ett annan dilemma är att målen inom lärarutbildningen inte alltid harmonierar med skolans krav på kunskaper. Grundskolans kursplan i matematik beskriver t.ex. ett ämnesinnehåll på olika nivåer, dels en formell matematik som bygger på ett matematiskt språk och matematiska symboler, dels på en matematik som kan användas som verktyg i vardagen. Det är ett stort problem för läraren att länka dessa två ämnesinnehåll till varandra eller att

härleda det ena ur det andra. Som stöd för detta använder sig lärare ofta av laborativt arbete och metaforer. I båda fallen är det emellertid viktigt att ha en så klar ämnesdidaktisk teori i botten att man dels kan uppfatta de algebraiska strukturer man vill konkretisera, dels finna sådana vardagshändelser och metaforer som på ett begripligt språk beskriver och förklarar dessa strukturer. I annat fall blir lektionerna lätt till "happenings" där läraren försöker ta sig förbi (lotsa sig förbi) ett akut undervisningsproblem istället för att belysa och lösa det.
En kritik som ständigt återkommer i den amerikanska litteraturen är riktad mot den ytlighet som präglar den matematikdidaktiska litteraturen. (Se t.ex. Stevensson & Stigler, 1992 Hiebert & Stigler, 1999, Ma, 1999, Kilpatrick, 2001) Det handlar i stor utsträckning om lösa uppslag utan sammanhållande idé. Om man utgår från de analyser som gjordes i kapitel 7.4 så upptäcker man t.ex. att den behandling som i den amerikanska didaktiska litteraturen ges av de negativa talen i stort sett genomgående bygger på arbete inom en metafor och att det ofta bygger på semantisk lotsning. Ingen av dessa strategier hjälper eleverna att konstruera önskade kunskaper. Det anmärkningsvärda är att denna typ av litteratur idag blir allt vanligare även i svensk lärarutbildning.

8.2 Ett nytt paradigm

I *Nationalencyklopedin* (1994) kan man läsa följande om paradigm och paradigmskifte:

> Forskning inom ett paradigms ramar består i första hand av "pussellösning"; man "städar" i paradigmet… Så småningom uppstår *anomalier*, dvs begreppsliga inkonsistenser eller observationer som inte passar in i paradigmet. När anomalierna blir så många och besvärande att de inte kan bortses ifrån uppstår en kris, vilket innebär att man går tillbaka till paradigmets förutsättningar och filosofiska grunder och undersöker dessa kritiskt. Ett *paradigmskifte* eller en *revolution* äger rum om det äldre paradigmet inte kan "räddas" och det samtidigt finns en attraktiv paradigmkandidat….

Den här rapporten handlar till stor del om behovet av ett paradigmskifte vad gäller de teorier som utgör basen för en utbildning av matematiklärare.

För att bli 4 - 9 lärare i Ma-NO läser de studerande oftast huvuddelen av sin ämnesteori i matematik på en universitetsinstitution för matematik alltså den typ av teori som i *Nationalencyklopedin* (1994) beskrivs som "en abstrakt och generell vetenskap" som "har frigjort sig från det konkreta ursprunget hos problemen". Det är bra att de lärarstuderande på det sättet erbjuds möjligheter att förbättra sina personliga kunskaper i matematik. Problemet är bara att de studerande har en begränsad tid på sig för en yrkesutbildning till lärare och att endast en mindre del av denna utbildning kan ägnas åt att förbereda dem för att bli lärare i matematik. Samtidigt kan man konstatera att enbart akademisk matematikkunskap inte räcker till för att bygga upp de matematikkunskaper som krävs enligt styrdokumenten för svensk skola. Man måste vara medveten om att de flesta människor använder matematik som ett verktyg i vardagen och att de i dessa situationer inte har behov av ett formellt språk, snarare av termerna i vardagens språk eller ett yrkesspråk. Det är också så att det vardagsmatematiska språket är uppbyggt på olika sätt i olika kulturer, något som är viktigt för läraren att observera i vårt allt mer internationaliserade samhälle. Det är samtidigt viktigt att uppmärksamma att vad som är logiskt och korrekt bör bedömas utifrån den lärandes förmåga att uppfatta språk och begrepp och att olika människor har olika behov och intresse för matematik. För att man som lärare skall kunna ta tillvara alla dessa intressen måste det finnas en teori för hur läraren kan knyta samman alla lösa trådar. I en lärarutbildning gäller det således att inslagen från de två olika ämnesteorierna optimeras på ett sådant sätt att den blivande läraren blir väl förberedd för sitt kommande yrke.

> Under de 12 år svenska elever går i skolan bildar de sig en rad uppfattningar om olika begrepp. Ett stort dilemma för läraren är emellertid att elever och deras tankevärldar är mycket olika. Utgående från den språkliga kompetens och de uppfattningar barn har skaffat sig innan de kommer till skolan skall de successivt bygga upp en stor mängd begrepp. Detta kan givetvis inte göras på en gång. Den enda realistiska lösningen är att eleverna börjar med att bygga upp ett antal enkla och preliminära begrepp utgående från ett för dessa begrepp ändmålsenligt språk. Efter hand bildar eleverna, med hjälp av dessa begrepp, kluster av begrepp som är mer eller mindre länkade till varandra. Dessa begrepp bildar i sin tur underlag för att modifiera den uppfattning man hade utgående från de första preliminära begreppen. Detta sker under skoltiden upprepade gånger och leder till en successiv förfining av elevernas begreppsapparat (se Marton & Booth, 2000).

För att ge lärare teoretiskt underlag för att bedriva den här typen av undervisning krävs en ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning. Utan en sådan teori blir det inte möjligt för läraren att härleda didaktikens viktiga vad- och hur-frågor. Det är sannolikt en sådan teori som krävs för att komma tillrätta med krisen inom matematikundervisningen. Men är då detta en riktig teori? Det kan väl bara finnas en enda teori för disciplinen matematik? Svaret är enkelt. Syftet med en teori är att man med dess hjälp skall kunna bygga upp och systematisera en kunskap inom ett territorium och utifrån den kunna fatta logiska beslut inom territoriet. Territoriet är i det här fallet skolämnet matematik och de viktigaste besluten handlar om hur man som lärare skall hjälpa elever i olika åldrar, och med olika intressen och förkunskaper, att bygga upp en för dem förståelig och användbar matematikkunskap. För detta krävs betydligt mer teoriska kunskaper än de som ingår i universitetsämnet matematik. Att den ämnesdidaktiska teorin idag inte är färdigutvecklad betyder inte att den är felaktig eller att den strider mot den gängse akademiska disciplinen. En preliminär version av teorin har i flera år används inom lärarutbildning och lärarfortbildning. Däremot behövs det resurser för att under de närmaste decennierna få den mer utvecklad. Problemet är att våga acceptera och satsa på ett nytt paradigm. Samtidigt har vi aldrig tidigare i litteraturen mött ett så starkt stöd för ett paradigmskifte inom lärarutbildningens matematikundervisning som nu.

Ett problem med akademikerns teori för matematik är dess formella språk och formellt beskrivna begrepp. I en ämnesdidaktisk teori är det viktigt att kunna beskriva motsvarande begrepp mindre formellt och med hjälp av ett enklare språkbruk. Med tanke på att språk och begrepp utvecklas parallellt, så blir det språkbruk som används i undervisningen ytterst viktigt. En ämnesdidaktisk teori måste av det skälet kunna beskriva olika fenomen och strategier så att de är kommunicerbara såväl med kolleger som med elever i olika åldrar. Den måste även beskriva hur ett vardagsspråk och det språk som används i samband med laborativt arbete kan se ut och hur det successivt kan transformeras till ett mer formellt språk. Just detta, att kunna knyta samman en konkret förklaring med en abstrakt, är enligt Löwings (2004) forskning ett stort problem för många lärare.

8.3 Vad ingår i en ämnesdidaktisk teori

En viktig del av en ämnesdidaktisk teori består i att bygga upp preliminära och utvecklingsbara begrepp som passar för elever i olika åldrar och med olika förförståelse. Detta måste dels ske på ett för eleverna uppfattbart språk och dels på ett sådant sätt att språk och begrepp blir successivt utvecklingsbara. Samtidigt måste begreppen på alla nivåer kunna användas till att tolka sådana situationer av matematisk natur som uppstår i elevernas omvärld.

Efter en diskussion i Stanford med den kinesiska forskaren Liping Ma växte följande beskrivning fram om hur en ämnesdidaktisk teori skulle kunna byggas upp. (Se även nedanstående figur.)

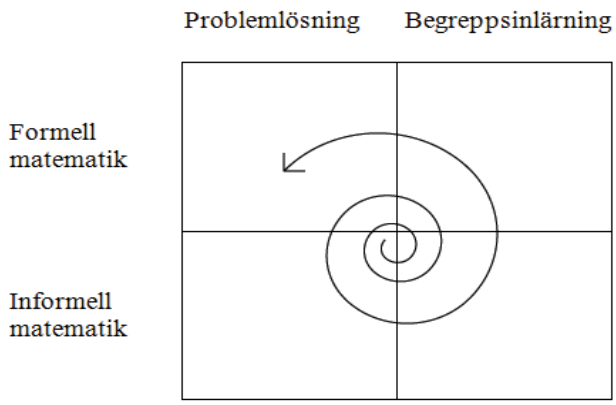
1. Utgående från vardagens erfarenheter, en metafor eller en preliminär definition börjar eleverna med att lösa en ny typ av problem eller att diskutera ett nytt fenomen eller begrepp.
2. De kan därvid (med lärarens hjälp) finna vissa mönster som kan uttryckas på ett informellt sätt och med ett vardagsspråk.

3. Dessa mönster bearbetas i nästa steg så att de leder till ett nytt mer formellt (matematiskt) begrepp.
4. Genom att utgå från detta begrepp kan eleverna nu lösa de givna problemen på en mer generell nivå.

När den här kunskapen har konsoliderats kan eleven betrakta och tolka omvärlden ur ett nytt mer utvecklat perspektiv. Det betyder att de på nytt, utifrån nya utgångspunkter, kan återvända till vardagen eller en ny metafor och

1. diskutera nya problem och fenomen på en djupare nivå.
2. söka nya mönster
3. …

Den här proceduren kan beskrivas som en spiral som sakta men säkert höjer sig från ett förskolebarns matematikuppfattning till akademikerns uppfattning av matematiska begrepp. Beroende på olika elevers intresse, behov och förutsättningar följer de spiralen olika långt. Eftersom man på varje nivå i spiralen har en fungerande förklaringsmodell (om än preliminär i relation till akademikern krav) så har man fått en modell för individuell anpassning av undervisningen som passar väl in på de olika kunskaps-kraven i skolans kursplaner.



Som framgår av den tidigare refererade litteraturen (Ball & Bass, 2000, Kanes & Nisbet, 1996, Leinhart m.fl.1991, Schulman 1986, 1987, Simon, 1993 och Kilpatrik m.fl (2001)) så ställs det stora krav på vad de kallar ett *pedagogical content knowledge*, det som vi vill utveckla till en ämnes-didaktisk teori. De komponenter som bör ingå är:

- En uppfattning av hur matematikerns matematik är uppbyggd.
- Kunskaper om skolmatematikens historiska bakgrund.
- Läroplansteori inklusive de pedagogiska idéer som ligger bakom de senaste kursplanerna i matematik.
- Matematikämnets kulturberoende.
- Kunskaper om språkbruk för formell och informell kommunikation i och om matematik.
- Kunskaper om inlärningsteorier.
- Slutsatser som kan dras från forskning kring elevers tänkande.
- Slutsatser som kan dras från forskning kring lärares tänkande.
- Slutsatser som kan dras från undervisnings/klassrumsforskning.
- Instrument för utvärdering av undervisningen, formellt som informellt, skriftligt som muntligt, samt hur man utgående från en utvärdering kan göra förändringar i sin egen undervisning eller i den lokala arbetsplanen.

Utgående från dessa komponenter gäller det att "rita en karta" med vars hjälp lärare kan finna lämpliga, individuellt anpassade, vägval i olika undervisningssituationer. För den som behärskar en ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning skall det vara möjligt att på ett relevant sätt bygga upp en hållbar metodik:

- Vad-frågan kan besvaras på en individuellt anpassad nivå utgående från de olika elevernas förkunskaper, behov och intresse. Undervisningen kan också byggas upp (planeras) ur ett longitudinellt perspektiv, utgående från en diagnostik byggd på forskning om elevers tänkande.
- Hur-frågan kan i första hand besvaras utgående från individuella mål och var i den tidigare beskrivna spiralen man lägger de olika individernas mål. Den ämnesdidaktiska teorin ger därvid besked om lämpliga val av vardagsanknytning, metaforer och laborationer. Först därefter blir det meningsfullt att välja arbetsform och arbetssätt.

Det här är inte kunskaper som en lärarstuderande konstruerar på egen hand eller senare bygger upp genom praktisk erfarenhet. För att hitta rätt i matematikundervisningen labyrinter behövs en karta att orientera efter.

Man kan som en avslutning fråga sig om inte en sådan här teori skulle bli väldigt styrande och därmed hindra läraren från att ta egna initiativ. Vårt svar är att en ämnesdidaktisk teori givetvis kan beskrivas på en rad olika sätt precis som all annan teori. Men vad teorin handlar om är i själva verket att ge läraren ett instrument som möjliggör individuella val av ämnesdidaktikens "vad" och "hur" utan risk för att valet leder till framtida problem. Det är snarare bristen på teori som begränsar valmöjligheterna och leder till sådana problem i undervisningen som det getts ett flertal exempel på i rapporten.

Referenser

Adler, J. (1999). The Dilemma of Transparency: Seeing and Seeing Through Talk in the Mathematics Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*. 30 (1) 47 - 64.

Adler, J. (2001). *Teching Mathematics in Multilingual Classrooms*. Nederlands: Kluwer Academic Publishers.

Alexandersson, M. (1994). *Metod och medvetande*. (Göteborg: Studies in Educational Science, 96) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Anderberg, B. (1983). *Matematikmetodik på högstadiet*. Älvsjö: Bengt Anderberg - Läromedel.

Andersson, B. (1974). *Några enkla experiment som belyser skolbarnens inträde i det formella operationsstadiet*. (Rapport från EKNA-gruppen) Göteborg: Göteborgs universitet, Pedagogiska institutionen.

Andersson, B. (2002). Utveckling av naturvetenskaplig undervisning - två exempel. I H. Strömdahl (Red.). *Kommunicera naturvetenskap i skolan.* Lund: Studentlitteratur..

Ahlström, R. (2002). Aldrig mer algoritmräkning. I *Dokumentation av 12:e Matematikbiennalen* s. 27 - 30). Linköping: Linköpings universitet.

Ball, D. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy. Examining what prospectve teachers bring to teacher education*. East Lansing: Michigan State Univerity.

Ball, D. & Bass, H. (2000). Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics. I J. Boaler (Ed.). *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. Westport: Ablex Publishing.

Barnes, D. (1976). *From Communication to Curriculum*. Hammondsworth: Peguin.

Bengtsson, J, & Kroksmark, T. (1993). *Allmänmetodik och allmändidaktik, Ett bidrag till en ämnesbestämning.* Göteborg: Göteborgs universitet. Institutionen för metodik i lärarutbildningen.

Bruner, J. (1960/77). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bruner, J. (1973). *The Relevance of Education*. Hammondsworth, UK: Penguin.

Carlesson, L. (1968). *Matematik för vår tid*. Stockholm: Prisma.

Carlgen, I. & Marton, F. (2000). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Lärarförbudet.

Carpenter, T., Moser, M. & Romberg, T. (Eds.) (1982*). Addition and subtraction. A cognitive perspecive. Hillsdale*, NJ: Erlbaum.

Eliasson, R. (2002). För många klarar inte skolan. *Dagens Nyheter* 28 januari 2002.

Ekstig, B. (2002). Naturvetenskapliga förklaringssekvenser. I H. Strömdahl (Red.). *Kommunicera naturvetenskap i skolan*. Lund: Studentlitteratur.
Greger, K. (1971). *Matematik 2. Geometri. Sannolikhetslära.* Stockholm: Almqvist & Wikell.
Grevholm, B. (1993). *Naturvetenskap och teknik i Sverige*. Stockholm: Verket för högskoleservice.
Hedrén, R. (1992). Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometri undervisningen. I G. Emanuelsson, B, Johansson & R. Ryding (Red.). *Geometri och Statistik*. Lund: Utbildningsradion och Studentlitteratur.
van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press, INC.
Häggström, J., Kilborn, W., Lindberg, L. &Löwing, M. (1994). *Studieupp-uppgifter. Rationella och irrationella tal*. Göteborg: Kompendiet.
Häggström, J. & Löwing, M. (2001). *Studieuppgifter. Rationella och irrationella tal.* Göteborg: Kompendiet.
Johansson, B. & Kilborn, W. (1986). Om matematikämnets innehåll och didaktik. I F. Marton (Red.). *Fackdidaktik volym III*. Lund: Studentlitteratur.
Kane, R.B. m.fl. (1974). *Helping children read mathematics*. New York: American Book Company.
Kanes, C. & Nisbet, S. (1996). Mathematics-teachers' knowledge bases: Implications for teacher education. *Pacific Journal of Teacher Education*, Jul96, Vol.24 (2). 159 - 171.
Kilborn, W. (1979a). *PUMP-projektet. Bakgrund och erfarenheter.* (Utbildningsforskning, FoU rapport 37). Stockholm: Skolöverstyrelsen.
Kilborn, W. (1979b). *Ämnesmetodiska processanalyser i matematik inom KomVux*. Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.
Kilborn, W. (1981). *Vad vet fröken om baskunskaper? Matematik för skolan och samhället*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
Kilborn, W. (1989). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 1: Grundläggande aritmetik*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2: Rationella och irrationella tal*. Stockholm: Liber-Hermods.
Kilborn, W. (1992). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 3: Mätning, Geometri, Funktioner, Sannolikhetslära och Statistik.* Stockholm: Almqvist & Wiksell /Hermods.
Kilborn, W. (1999). *Didactic of Mathematics. A Handbook for Primary School Teaching.* Kimberley: Department of Education in the Northern Cape Province.
Kilborn, W. (2000). *Pesquisa e desenvolvimento da matemática na escola primário em Moçambique. 1ª Parte: Sobre o Desenvolvimento de um Novo Conjunto de Livros Escolares., 2ª Parte: Sobre a Avaliaçao.*

Cardernos de Pesquisa nº17. Maputo, Moçambique: National Institute for Education Development (INDE).
Kilborn, W. (2003). *Manual de Didáctica de Matemática*. Maputo: INDE.
Kilborn, W. & Löwing, M. (2000). Tankefel i ämnet matematik. *Skolbarn*, 3/2000, 15 - 24.
Kilpatrick, J, Swafford, J. & Findell, B. (Ed.). (2001) *Adding it up*. Washington, DC: National Academy Press.
Kline, M. (1953). *Mathematics in Western Culture*. Harmondsworth, Middlesex: Penguin Books.
Kroksmark, T. (1987). *Didaktiken i grundskollärarutbildningen*. Projekt-rapport 1989:2. Stockholm: UHÄ, FOU-enheten.
Leinhart, G., Putnam, R., Stein, M. & Baxter, J. (1991). Where subject matter knowledge matters. I J. Brophy (Ed.). *Advances in research on teaching* (Vol. 2 pp. 976 - 113). Greenwich, CT: JAI Press.
Leinhart, G. & Smith, D. (1985). Expertice in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 77 (3), 247 - 271.
Lehndals, B. & Runesson, U. (1995). *Vägar till elevers lärande*. Lund: Studentlitteratur.
Lehndals, B. & Runesson, U. (1996). *Vägar till lärares lärande*. Lund: Studentlitteratur.
Lester, F. (1988). Teaching mathematics problem solving. *Nämnaren nr 3, 1988*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
Liedman, S-E. (2001). *Ett oändligt äventyr*. *Om människans kunskaper*. Falun: Albert Bonniers förlag.
Lärarprogrammet 120 - 220 poäng. (2001). Göteborg: Utvecklingsgruppen för lärarutbildning vid Göteborgs univeritet.
Löwing, M. (2000). *Kartläggning av utländska lärares utbildning och arbetssituation. Delrapport 1: Bakgrund och instrument* (IPD-rapport nr 2000:04) Göteborg: Göteborgs Universitet, Institutionen för pedagogik och didaktik.
Löwing, M. (2001). *Kartläggning av invandrade lärares yrkessituation. Delrapport 2: Lektionsstudier och resultat* (IPD-rapport nr 2001:01) Göteborg: Göteborgs Universitet, Institutionen för pedagogik och didaktik.
Löwing, M. (2004) Akademisk avhandling i manuskript.
Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik*, Lund: Studentlitteratur.
Löwing, M. & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning. En inkörsport till matematiken*. Lund: Studentlitteratur.
Lybeck, L. (1973). *Vetenskapsteoretisk studie och rekonstruktion av arkimediska forskningsprogram*. (Rapport nr 47). Göteborg: Göteborgs universitet, Avdelningen för vetenskapsteori.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. New Jersey: Laurence Erlbaum Associates, Publishers.

Madsén, T. (2002). Återupprätta läraren. *Pedagogiska magasinet,* nr 3, 54 - 59.

Marton, F. (Red.). (1986). *Fackdidaktik (Vols. I - III)*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Maerker, L. (2001). Med huvudet i växellådan. I M. Löwing, G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding. (Red.).

Vänbok till Wiggo Kilborn. Göteborg: Göteborgs universitet, Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

Matematik i grundskolan. Låg och mellanstadiet. 1983. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM. (2001). *Hög tid för matematik*. Göteborg: NCM

Nationalencyklopedin. (1994, 1995). Höganäs: Bra Böcker.

Nersessian, N. (1992). Constructing and instructing: The role of "abstaction techniques" in creating and learning physics. In R. Duschl and R. Hamilton (Eds.) *Philosophy of science, cognitive psychology, and educational theory and practice* (48 - 58). Albany: State University of New York Press.

Nilsson, H. & Wigforss, F. (1951). *Aritmetik*. Uppsala: Hugo Gebers förlag.

Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status. I B. Grevholm (red.) *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.

Nämnaren 2-3. (1986/87). Stockholm: Utbildningsförlaget.

Paulsson, K-A. (1983). Multiplikation. I *Matematik i grundskolan. Låg och mellanstadiet.* Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

Pimm, D. (1987). *Speaking Matematically. Communication in Mathematics classroom*. London: Routledge.

Putman, R. (1992). Teaching the "hows" of mathematics for everyday life. A case study of a fifth-grade teacher. *The Elementary School Journal*, 93 (2), 163 - 177.

Schulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4 - 14.

Schulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform*. Harvard Educational Review*, 57, 1 - 22.

Simon, M. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3), 233 - 254.

Setati, M. (1998*). Innovate language practies in multilingual mathematics classrooms*. Johannesburg: University of the Wiwatersrand.

Sing, S. (1997). *Fermats gåta*. Stockholm: Norstedts förlag.

Skolverket. (2000a). *Grundskolan. Kursplaner och betygskriterier 2000*. Stockholm: Fritzes
Skolverket. (2000b). *Barnomsorg och skola i siffror 2000*. Del 1 Betyg och utbildningsresultat. Rapport nr 181. Stockholm: Skolverket.
Skolverket. (2001). *Barnomsorg och skola i siffror 2001*. Del 1 Betyg och utbildningsresultat. Rapport nr 195. Stockholm: Skolverket.
Skolöverstyrelsen. (1966). *Matematikterminologi i skolan*. Stockholm: SÖ-förlaget.
Skolöverstyrelsen. (1969). *Matematik NU för lärare på högstadiet*. Malmö: Hermods.
Skolöverstyrelsen. (1979). *Matematikterminologi i skolan*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
SOU 1992:94. *Skola för bildning.* Betänkande av Läroplanskommittén. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
SOU 1999:63. *All lära och leda*. Lärarutbildningskommitténs slutbetänkande. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
Stevenson, H. & Stigler, J. (1992). *The Learning Gap*. New York: Touchstone.
Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: The Free Press.
Strömdahl, H. (2002). Kommunicera naturvetenskap i skolan - en introduktion. I H. Strömdahl (Red.). *Kommunicera naturvetenskap i skolan*. Lund: Studentlitteratur.
Strömqvist, G. (Red.). (1997). *Från metodik till allmän didaktik*. Donsö: Didaktisk Tidskrift.
Svantesson, N. (1978). Den naturvetenskapliga undervisningen - skolans strykpojke. I K. Waern (Red.). *Mot en ekologiskt världsbild. Ny väg för naturvetenskaplig utbildning*. Malmö: Liber.
Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Bokförlager Prisma.
Thompson, J. (1986). Historiens roll i matematikundervisningen eller retorikens återkomst. I F. Marton (Red.). *Fackdidaktik volym III*. Lund: Studentlitteratur.
Thompson, J. (1991). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur.
Thompson, J. (1991b). *Matematiklexikon*. Stockholm: Wahlström och Widstrands förlag.
Wolpert, L. (1992). *The Unnaural Nature of Science*. London: Faber and Faber.
Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. Cambidge: The MIT Press.
Wyndhamn, J., Riesbäck, E. & Schoulz, J. (2000). *Problemösning som metafor och praktik*. Linköping: Linköpings universitet. Institutionen för tillämpad lärtarkunskap.

Zepp, R. (1989). *Language and Mathematics Education*. Hong Kong: UEA
Zevenbergen, R. (2000). "Cracking the Code" of Mathematics Clasroom: School Success as a Function of Linguistic, Social and Cultural Background. I J. Boaler (Ed.). *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. Westport: Ablex Publishing.
U2000/01:UbU3. *En förnyad lärarutbildning*. Stockhom: Riksdagen.

Sammanfattning

Löwing Madeleine: Ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning. Ämneskunskapers relation till individ och omvärld.

Rapport från Institutionen för pedagogik och didaktik, Göteborgs universitet, 2002.

ISSN: 1404-062X.

Inom lärarutbildningen förekommer två typer av ämnesteori i matematik,

- akademikerns ämnesteori som systematiserar en deduktiv vetenskap. Teorin är till sin natur abstrakt och generell och syftar till en metod-utveckling av ämnesinnehållet i sig.
- en ämnesdidaktisk matematikteori (alltså en teori för ämnesinnehållet i skolämnet matematik) som systematiserar en empirisk vetenskap. Teorin syftar till att ge lärarutbildare och lärare instrument för att optimera inlärningen av olika ämnesinnehåll i relation till en omvärld och utgående från olika individers förkunskaper och förmåga.

Medan akademikerns teori syftar till att fördjupa den lärarstuderandes kunskaper i matematik, syftar den ämnesdidaktiska teorin till att ge den lärarstuderande ett lärarperspektiv på matematikinnehållet. I det förra fallet är målet att själv kunna lösa matematiska problem i det senare fallet är målet att förstå hur problem kan lösas på olika kognitiva nivåer av elever med olika förkunskaper, mål och ambition. Att utveckla en ämnesdidaktisk teori är således ett tvärvetenskapligt arbete.

Rapporten behandlar de erfarenheter vi redan har av en ämnesdidaktisk teori och idéer om hur man kan bygga vidare på teorin med hjälp av forskning och beprövad erfarenhet. Behovet av en sådan här teori har under senare år fått ett starkt stöd i internationell forskning. Forskningen pekar också på att många av de problem man idag finner i amerikanska skolor kan härledas till bristande teorier för innehållet i skolämnet matematik.

En sådan här teori för skolmatematikens innehåll får inte förväxlas med ämnesdidaktik. I själva verket är teorin en förutsättning för ämnesdidaktikens val av "vad" och "hur". Utan en teori kommer ämnesdidaktikens val av innehåll, metoder och arbetssätt att bli självändamål utan koppling till en systematik inlärning av ett avsett innehåll.

Andra uppdaterade tryckningen november 2003
Rapporten finns även på internet:
www.ped.gu.se/ipd/adid/publikationer.htm